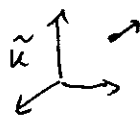


Relativitáselmélet és rel. mechanika:

Galilei / Newton:



K $\tilde{K}$ inerciarendszer (!)

$\tilde{K}$ sebessége K -ból nézve $\underline{w}$

P sebessége $\tilde{K}$ -ban $\underline{\tilde{v}}_P$

$$\Rightarrow \underline{v}_P = \underline{w} + \underline{\tilde{v}}_P$$

- rel. elm.: a törvények $\forall$ inerciarendszerben u. azok (erők u. azok.)

Maxwell:

vákuumban

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(x, t) = 0 \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right)$$

$\Rightarrow$ fény $\forall$ irányban c seb.-vel terjed

ha M.E. igaz $\tilde{K}$ -ban és a Galilei-féle seb. öm. igaz $\Rightarrow$ nem lehet igaz K -ban!

$\Rightarrow$ É ter (kihátrélt i.r., ahol M.E. igaz...)

teszt:

- Michelson - Morley

- Alväger et al (CERN, 1964)

$$P^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

$$w \approx c$$

foton sebessége is ...



✓ - idő nem abszolút (atomóra)

✓ - μ -on (' μ -mezon')

lepton

Rel. elm.
(Galilei-haló rosz)

Einstein:

- inerciarendszer: $\forall$ magára hagyott test...

- fény $\forall$ inerciarendszerben c -vel terjed



$$\Rightarrow (dx)^2 = c^2 dt^2 \Rightarrow d\tilde{x}^2 = c^2 d\tilde{t}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2} = \text{invariáns} (*)$$

$$\tilde{X} \equiv \tilde{X}^M \equiv (c\tilde{t}, \tilde{\underline{x}}) ; X \equiv X^M \equiv (ct, \underline{x})$$

origo essen egybe...

$$\tilde{X} \overset{?}{\longleftrightarrow} X$$

kapcsolat lin.
(egyes von. egy.
mozgás...)

$$\boxed{\tilde{X} = L X}$$

4x4-es
matrix

$$\boxed{\tilde{X}^M = L^M_{\nu} X^{\nu}}$$

$$g \equiv g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

ezért $ds^2 = dX g dX \stackrel{!}{=} d\tilde{X} g d\tilde{X} = dX (L^T g L) dX \quad \forall dX = dx$

(*) $\Leftrightarrow \boxed{g = L^T g L}$ $L \in O(3,1)$ isopotential
 $\sim$ Lorentz-isopotential $\equiv \mathcal{L}$
 $L \in \mathcal{L}$

milyen alakú?

eszm. végt. 2×2 -es példák:

$$L_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2^T g_2 L_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \gamma^2 & \alpha\beta - \gamma\delta \\ \alpha\beta - \gamma\delta & \beta^2 - \delta^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (a) \quad \alpha^2 - \gamma^2 = \delta^2 - \beta^2 = 1$$

$$(b) \quad \alpha\beta - \gamma\delta = 0$$

$$\gamma = -\operatorname{sh} \varphi_2$$

$$\beta = -\operatorname{sh} \varphi_1$$

 $\Rightarrow$

$$\alpha = \overset{\pm 1}{\overset{+}{\delta_t}} \operatorname{ch} \varphi_1 \Rightarrow$$

$$\delta = \delta_x \operatorname{ch} \varphi_2$$

$$\delta_t = \delta_x = 1$$

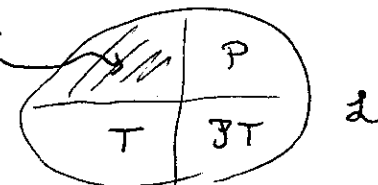
$$\Rightarrow (b): \operatorname{sh}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\Rightarrow \boxed{L_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & -\operatorname{sh} \varphi \\ -\operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}}$$

többi eset: $P \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad T \equiv \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_2 = \{L_2(\varphi), PL_2(\varphi), TL_2(\varphi), PTL_2(\varphi)\}$$

közös
 transzform.
 (reziprok.)



• mi φ ??

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ \tilde{x} &= x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi \end{aligned}$$

$\tilde{K}$ rendszer: $\tilde{x} = 0$ origó

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = c \cdot \tanh \varphi = w}$$

$$\frac{1}{1 - \tanh^2 \varphi} = \cosh^2 \varphi \Rightarrow \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \sinh \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{w}{c} = \tanh \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{t} = \frac{t - \frac{w}{c^2} x}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}} ; \boxed{\tilde{x} = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}}$$

$c \rightarrow \infty$ esetben Galilei - transzformáció

• invert?

$$\boxed{L_2(\varphi_1) L_2(\varphi_2) = L_2(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$L_2(\varphi)^{-1} = L_2(-\varphi) : \quad \underline{w \leftrightarrow -w}$$

• sebességösszeadás:

$$\tilde{v}_p \equiv c \tanh(\varphi_2) ; \quad w = c \tanh(\varphi_1)$$

$$\Rightarrow \frac{v_p}{c} = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh(\varphi_1) + \tanh(\varphi_2)}{1 + \tanh(\varphi_1) \tanh(\varphi_2)} = \frac{1}{c} \frac{\tilde{v}_p + w}{1 + \frac{\tilde{v}_p w}{c^2}}$$

$$\boxed{v_p = \frac{w + \tilde{v}_p}{1 + \frac{w \tilde{v}_p}{c^2}}}$$

• $c \rightarrow \infty$: Galilei ✓

• $\tilde{v}_p = c \Rightarrow v_p = c$!

• idő dilatació:

$$\tilde{x} = 0 \quad \Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}} \quad \leftarrow \text{szajátidő}$$

$\Delta t_0 \equiv \Delta \tau$ szajátidő

• Lorentz - kontrakció: $\tilde{K}$ - ban méterrúd dél: $\Delta \tilde{x} = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$

$$K - \text{ban: mozog: } \tilde{x}_{1/2} = ct = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (x_{1/2} - wt_{1/2}) \quad \text{pályán}$$

$t_1 = t_2$ - ben

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \beta^2} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \Rightarrow \boxed{L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}}$$

Lorentz-transzformációk általánosítása:

• forgatások:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta & \\ & \sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad R_x, R_y$$

• Boostok:

$$K_x(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & & \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad K_y, K_z$$

vizsgáljuk!

$$K_x(\varphi_x) K_y(\varphi_y) \neq K_y(\varphi_y) K_x(\varphi_x)!$$

$$K_x R_z \neq R_z K_x!$$

4 darabra esik fel:

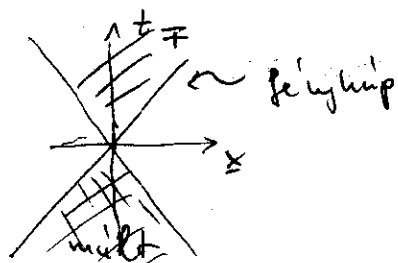
$$L_{00} > 0 \Leftrightarrow L_{00} < 0$$

$$\det L = 1 \Leftrightarrow \det L = -1$$

$\det L = 1$; $L_{00} > 0 \Rightarrow$ "rendes L-transzformáció"

(teridő szimmetriája nagyobb, ellentétben is benne vannak
 $\rightarrow$ Poincaré-transzformáció)

Minkowski-ter:



jövő és múlt időtartomány

- 4-es vektor

$$A: \tilde{a}^\mu = L^\mu_\nu a^\nu \quad (\tilde{A} = L A)$$

első-/második index:

$$g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} \quad g^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu$$

kovariáns a^μ

kontravariáns

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$\{a^\mu\} = (a_0, \underline{a})$$

$$\{a_\mu\} = (a_0, -\underline{a})$$

- skálár:

pl.

$$A \cdot B \equiv a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = A^T g B$$

Impulzus - energia

Newton: $m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2 = m_1 \underline{v}'_1 + m_2 \underline{v}'_2$

→ nem Lorentz-inv. $(m_1 \underline{\tilde{v}}_1 + m_2 \underline{\tilde{v}}_2 \neq m_1 \underline{\tilde{v}}'_1 + m_2 \underline{\tilde{v}}'_2)$

⇒ meg kell keresni a megf. négyesvektort!

seb.: $\frac{dx}{dt}$ nem jó ... dt függ a rendszerrel

⇒ $d\tau^2 c^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = ds^2 \Rightarrow$ sajátidő min az!

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

négyesvektor!
négyessebesség

$$\tilde{U}^\mu = L^\mu_\nu U^\nu$$

$$U = \{U^\mu\} = \frac{dt}{d\tau} (c, \underline{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \underline{v}) = \frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1, \underline{\beta}) \quad \underline{v^2 = c^2}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

négyesimpulzus:

$$p^\mu \equiv m_0 U^\mu$$

$$= (m c, m \underline{v}) = (p_0, \underline{p})$$

↗ $p^2 = m^2 c^2$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

az kell megmaradjon:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

⇒ erő ellenerő törvénye

⇒

$$\underline{F} = \frac{d}{dt} (m \underline{v})$$

figyelem

$$\frac{d}{dt} (m(\underline{v}) \underline{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \underline{v} \right) = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \dot{\underline{v}} + \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{\dot{v}}}{c^2} \right) \underline{v}$$

$$\underline{F} = m \dot{\underline{v}} + m \frac{\underline{v} \cdot \underline{\dot{v}}}{c^2 - v^2} \underline{v} = \underbrace{m \left(1 + \frac{\underline{v} \cdot \underline{\dot{v}}}{c^2 - v^2} \right)}_{\text{anizotróp tömeg}} \dot{\underline{v}}$$

energia?

$$p^2 = p_0^2 - \underline{p}^2 = m_0^2 c^2 \Rightarrow \underbrace{p_0}_{mc} \frac{dp_0}{dt} = \underline{p} \cdot \frac{d\underline{p}}{dt} = m \cdot \underline{v} \cdot \underline{F}$$

$$\Rightarrow \Delta p_0 = \frac{1}{c} \int dx \cdot \vec{F} = \text{munka} / c$$

$$\Rightarrow \boxed{cp_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv E} \quad \text{energia!} \quad \boxed{p^\mu = (E/c, \vec{p})}$$

p^μ megmaradása $\Leftrightarrow$ energiamegmar.

$$E(v) \approx m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$\nwarrow$ nyugalmi energia $\nwarrow$ kinetikus energia

$\vec{F}$ nem négyesvektor...

$$\boxed{f^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau}} \quad \text{az, négyesv}$$

$$\vec{F} = (f_0, \vec{f}) \quad f = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \vec{F} \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}$$

$\nwarrow$ ezt kell transformálnunk...

$\vec{F}$ "konzervatív" $\exists \phi(x, t) : f^\mu = \partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, -\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)$

Hatás: szabad rész.: $S_0 = \alpha \cdot \int d\tau = \alpha \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$

min? $= \int ds = c \int d\tau$? $\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \alpha = -m_0 c^2 \Rightarrow \boxed{S_0 = -m_0 c^2 \int d\tau}$$

$$\boxed{L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow F = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \checkmark$$

$$H = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \checkmark$$

$$\boxed{H(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

$$p^2 + m_0^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Mozgás EM térben:

$$A^\mu = (\phi/c, \underline{A}) \quad \text{négyesvektor}$$

$$j^\mu = (c\rho, \underline{j}) \quad \text{négyesvektor}$$

$$q \underset{\uparrow}{U}^\mu A_\mu = q \left(\frac{dt}{d\tau} c \frac{\phi}{c} - \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt} \cdot \underline{A} \right) \quad \text{az}$$

c

$$\Rightarrow S_1 = \left(\int L_1 dt \right) = - \int d\tau q U^\mu A_\mu = - \int dt (q\phi - q \cdot \underline{v} \cdot \underline{A}) \quad \text{rel. inv.}$$

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q \underline{v} \cdot \underline{A}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{kan.}}{p} = q\underline{A} + \frac{m_0 \underline{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{kin.}$$

$$H = \sqrt{(p - q\underline{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q\phi$$

megjegyzés: ...

$$\frac{d}{dt} (m(\underline{v}) \cdot \underline{v}) = q\underline{E} + q \underline{v} \times \underline{B} \quad \checkmark$$