Pontrendszerek:

$\underline{r}_i$ $\quad i = 1, \dots, N$ tömegpont m_i tömeggel

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{i \leftarrow j} \quad ; \quad \frac{d}{dt}(m_i \dot{\underline{r}}_i) = \underline{F}_i$$

impulzus: $\quad \underline{P} \equiv \sum_i \underline{p}_i = \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i$

$$\dot{\underline{P}} = \sum_i \underline{F}_i^{(k)} + \underbrace{\sum_{i,j} \underline{F}_{i \leftarrow j}}_{0} = \sum_i \underline{F}_i^{(k)} \equiv \underline{F}$$

ha $\underline{F}_{i \leftarrow j} = -\underline{F}_{j \leftarrow i}$ (Newton)

$$\boxed{\dot{\underline{P}} = \underline{F}}$$

össztömeg: $\quad M \equiv \sum_i m_i$

tömegközéppont: $\quad \underline{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \underline{r}_i$

sebessége $\quad \underline{V} \equiv \dot{\underline{R}}$

ha m_i-k állandók: $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{P} = M \dot{\underline{R}} \quad ; \quad \underline{F} = M \ddot{\underline{R}}}$

klasszikus mechanikában össztömeg nem vált! $\leftrightarrow$ rel. elm.

tömegpont fogalma konzisztens ~ atom stb.

impulzusmomentum:

$$\underline{L} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_i (\underline{R} + \tilde{\underline{r}}_i) \times m_i (\dot{\underline{R}} + \dot{\tilde{\underline{r}}}_i) =$$

$$\underline{r}_i \equiv \underline{R} + \tilde{\underline{r}}_i \quad ; \quad \sum_i m_i \tilde{\underline{r}}_i = 0 \,!$$

$$= \underbrace{M \underline{R} \times \dot{\underline{R}}}_{\text{TKP pályam.}} + \underbrace{\sum_i \tilde{\underline{r}}_i \times m_i \dot{\tilde{\underline{r}}}_i}_{\text{belső forgás}} = \underline{L}_{pálya} + \underline{L}_{belső}$$

$\Leftrightarrow$ elektron: van belső forgása is! $\sim \hbar$

$$\boxed{\underline{L} = \underline{L}_{pálya} + \underline{L}_{belső}}$$

$$\dot{\underline{L}} = \sum_i \underbrace{\dot{\underline{r}}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i}_{=0} + \sum_i \underline{r}_i \times \overbrace{m_i \ddot{\underline{r}}_i}^{\underline{F}_i} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i \equiv \underline{N}$$

$$\boxed{\dot{\underline{L}} = \underline{N}}$$

$$\boxed{\dot{\underline{L}}_{pálya} = \underline{R} \times \underline{F}} \qquad \boxed{\dot{\underline{L}}_{belső} = \sum_i \tilde{\underline{r}}_i \times \underline{F}_i}$$

néhány esetben a belső erők jj eltűnnek

pl. $\underline{F}_{ij} = (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot f(r_{ij})$

$$\sum_{i,j} \tilde{\underline{r}}_i \times (\tilde{\underline{r}}_i - \tilde{\underline{r}}_j) \quad f(r_{ij}) = -\sum_{i,j} \underbrace{\tilde{\underline{r}}_i \times \tilde{\underline{r}}_j}_{\text{antiszimmetrikus} \ldots} f(r_{ij})$$

ekkor $\dot{\underline{L}}_{belső} = \sum_i \tilde{\underline{r}}_i \times \underline{F}_i^{(k)}$

Energia?

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i m_i \frac{\dot{\underline{r}}_i^2}{2}\right)}_{K} = \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{F}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \Rightarrow \delta K = \sum_i \underline{F}_i \delta \underline{r}_i$$

K kinetikus energia

$$K(2) - K(1) \equiv K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \, \underline{F}_i \cdot \frac{d\underline{r}_i}{d\tau} = \sum_k \int_1^2 \underline{F}_k \, d\underline{r}_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta K = \sum_k \int_1^2 \underline{F}_k \, d\underline{r}_k}$$

erők munkája

$\underline{F}_k$ konzervatív, ha

$$\exists \; V(\underline{r}_1, \ldots \underline{r}_n) \rightarrow \underline{F}_k = -\frac{\partial V}{\partial \underline{r}_k}$$

ekkor $\boxed{K + V \equiv E = cst}$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{\underline{R}}^2 + \underbrace{2\dot{\underline{R}}\dot{\hat{\underline{r}}}_i}_{0} + \dot{\hat{\underline{r}}}_i^2\right) = \frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2 + \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\hat{\underline{r}}}_i^2}$$

pályaen. belső en

$$\frac{dK_{pálya}}{dt} = \underline{F}\cdot\dot{\underline{R}} \Rightarrow \boxed{\Delta K_{pálya} = \int_1^2 d\underline{R}\cdot\underline{F}(\underline{R},\hat{\underline{r}}_i \dots)} \sim \underline{r}_i(\underline{R}(t))$$

- néha szerencsénk van: $\underline{F}(\underline{R},\{\hat{\underline{r}}_i\}) \approx \underline{F}(\underline{R})$ (homogén grav. tér)
- néha nincs:
  pl. két dipólus:

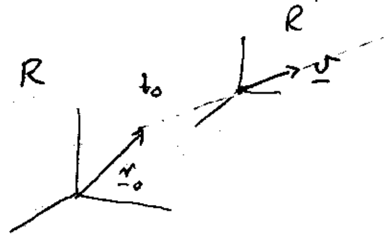
között erő függ f_1 ill. f_2 $(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$-höz visz. irányától...

megmaradó mennyiségek szimmetriákhoz kapcsolódnak
E, $\underline{P}$ ill. $\underline{L}$ a "téridő" szimmetriái:

$E \leftrightarrow$ időeltolás
$\underline{P} \leftrightarrow$ homogenitás
$\underline{L} \leftrightarrow$ izotrópia
töltés ?? ... $\mapsto$ mértékinv.
tömeg: nem marad meg...

Galilei transzformáció:

$$\underline{r}_i' + \underbrace{\underline{v}(t-t_0) + \underline{r}_0}_{\underline{r}(t)} = \underline{r}_i$$



← másik koordinátarendszer (megfigyelő) origójának mozgása

t.kp.

$$\boxed{\underline{R}' + \underline{r}(t) = \underline{R}} \quad \vee \quad \boxed{\underline{r}_i' = \underline{r}_i - \underline{r}(t)}$$

$$\boxed{\dot{\underline{R}}' = \dot{\underline{R}} - \underline{v}} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\underline{v}_i' = \underline{v}_i - \underline{v}}$$

$$\boxed{\ddot{\underline{R}}' = \ddot{\underline{R}}} \qquad \boxed{\ddot{\underline{v}}_i' = \ddot{\underline{v}}_i} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{F}_i = \underline{F}_i'}$$

energia ?

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\underline{v}_i' + \underline{v}\right)^2 = \frac{M v^2}{2} + K' + \underline{v} \cdot M \cdot \underline{V}'$$

$$\underline{V}' = \underline{V} - \underline{v}$$

$$\Rightarrow \quad K' - \frac{M v^2}{2} + M \cdot \underline{v}\, \underline{V}$$

$$\boxed{K' = K + \frac{M v^2}{2} - M\, \underline{v} \cdot \underline{V}}$$

→ pot. energia invariáns (alakja megv. de) többnyire, pl. ha csak $\underline{r}_i - \underline{r}_j$ -n keresztül függ a koord.

→ belső energia invariáns, hiszen $\tilde{\underline{r}}_i = \underline{r}_i - \underline{R} = \underline{r}_i' - \underline{R}'$ ✓

$$\boxed{E'_{belső} = E_{belső}} \; ; \; \boxed{E'_{pálya} = E_{pálya} + \frac{M v^2}{2} - M\, \underline{v} \cdot \underline{V}}$$

impulzus momentum ?

még rondábban transzformálódik:

$$\boxed{\underline{L}' = \underline{L} + \underline{r} \times M \underline{v} - \underline{r} \times M\, \underline{V} - \underline{R} \times M \underline{v}}$$

h. f.

impulzus viszont egyszerű:

$$\boxed{\underline{P}' = \underline{P} - M \cdot \underline{v}}$$

---

sok részecske: egyenletek megoldása csak numerikusan lehetséges → molekuladin. szimulációk
instabil megoldások → kaotikus trajektóriák ...

Spec. eset: kéttest probléma:

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = \underline{F} \qquad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$\uparrow$ homogenitás $\qquad \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$

$$\Rightarrow \quad \underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\underline{R}} = 0 \quad \Rightarrow \underline{R} = \underline{V} \cdot t + \underline{R}_0$$

$$\underline{r} \equiv \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

$$m_1 m_2 \ddot{\underline{r}} = (m_1 + m_2)\,\underline{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r})}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ redukált tömeg

TKP koordinátarendszer: $\underline{R} = 0 \qquad \underline{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\underline{r} \, ; \quad \underline{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}$

- Keppler probléma:

$$m \cdot \frac{M}{m + M} \ddot{\underline{r}} = -\gamma M \cdot m \frac{\underline{r}}{r^3}$$

$\Rightarrow$ megoldás nem független a bolygó tömegétől

dimenzióan:

$$\frac{1}{m + M} \frac{a}{T^2} \sim \gamma \frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} \sim \frac{1}{\gamma} \frac{1}{m + M} \sim \frac{1}{M} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}$$

- színkép $\rightarrow$ izotópokból felépített atom színképe