Hamilton - Jacobi egyenlet

Ha $\exists$ $\tilde{F}(q, P, t)$ $\Rightarrow$ $K = H + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ $P = \text{cst}$, $Q = \text{cst}$: akkor $\tilde{F} \equiv S(q, \underset{\text{állandók}}{\underline{\alpha}}, t)$

$$p_e = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_e} \Rightarrow \boxed{H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Hamilton - Jacobi egy.

S: Hamilton principális fv.-e

ha megoldottuk:

$$Q_e = \frac{\partial S}{\partial P_e} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_e} = \text{cst} \equiv \beta_e$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_e}(q, \alpha, t) = \beta_e \Rightarrow \boxed{q(t, \alpha, \beta)}$$

példa: harm. oszcillátor

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

változók szétvál. H nem függ t-től

$\Rightarrow$ $S(q, t) = S_0(q) + S_t(t)$

S_0: rövidített hatásfv.

$S_t = -Et$

$$\Rightarrow \frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \Rightarrow$$

$$S(q, t) = \int^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2 \tilde{q}^2}\, d\tilde{q} - Et + \text{cst}$$

2 paraméter $\alpha_0 \Leftrightarrow \text{cst}$ (lényegtelen)

$\alpha \Leftrightarrow E$!

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{1}{2}\int^q \frac{2m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}}\, dq$$

$$\beta + t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 m}{2E} q^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} \arcsin \frac{m\omega^2}{2E} q^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \omega (t+\beta)}$$

S valóban a hatást adja:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_e}}_{p_e} \dot{q}_e + \frac{\partial S}{\partial t} = p_e \dot{q}_e - H(q, p, t)}$$

Integrálhatóság, hatás - szög változók:

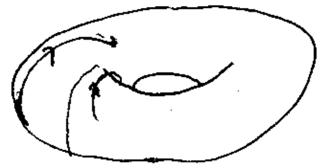
több def.:

Liouville: $H(q, p)$ integrálható, ha $\exists$ $F_1, \dots, F_f$ (független) mozgásáll.

- $[H, F_k] = \emptyset$
- $[F_k, F_e] = \emptyset \quad \forall k, e$

Liouville-tétel (integrálhatósági) Σ_F legyen az $F_k = cst$ felület

ha Σ_F kompakt, akkor egy f-dim. tórusz!



H ezen a felületen generál mozgást!

ekkor választhatók: I_k-k, (hatásvált.), hogy

- $H = H(I_1, \dots, I_f)$
- I_k-hoz tartozó ϕ_k 2π-periodikus szögvált.
- $\dot{\phi}_k = \omega_k = \frac{\partial H}{\partial I_k}$

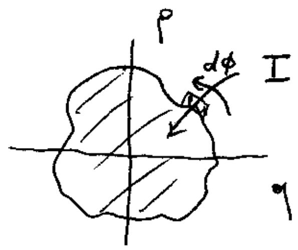
lehetőségek
- ω_k/ω_e nem racionális $\Rightarrow$ bejárja a tóruszt a pálya (Lissajou-görbék)
- $\exists\, \omega_k/\omega_e \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ nem sűrű a tóruszon

pl. Kepler-probléma

példa: szimm. súlyos pörg. $\Rightarrow$ 3 periodikus mozgás-ból áll a pálya!

Konstrukció 1D-ben:

$$H = H(p,q) \Rightarrow S = S_0 - \overset{\alpha_1}{E}t$$



$$H\Big(\underbrace{\frac{\partial S_0}{\partial q}}_{p}, q\Big) = E$$

$$p \Rightarrow p(q,E)$$

inverzió: $\boxed{I = \frac{1}{2\pi}\oint dq\, p(q,\overset{\alpha_1}{E})} \Rightarrow E(I)$

$$S_0 = \int^q dq\, p(q,E) = \int^q dq\, p(q,I)$$

használjuk ezt alkotófv.-nek! (nem az S-et)

$$\Rightarrow \phi = \frac{\partial S_0}{\partial I}(I,q) \quad ; \quad p(I,q) = \frac{\partial S_0}{\partial q} \ \checkmark$$

$$H = E(I)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\phi = \frac{\partial E(I)}{\partial I} = \omega(I)}$$

ellenőrzés: $H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \Rightarrow I = \frac{1}{2\pi}\oint dq\, \sqrt{2m(E - V(q))}$

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{2\pi}\oint dq\, \underbrace{\frac{m}{p(q,E)}}_{1/v} = \frac{T(E)}{2\pi}$$

$$\dot\phi = \frac{2\pi}{T(E)} = \frac{2\pi}{T(I)} \ \checkmark$$

Ha S_0 külj. szétválasztható:

$$S_0 = \sum_e S_e(q_e, \{\alpha_e\}) \Rightarrow p_e(q_e;\alpha_e) = \frac{\partial S_e}{\partial q_e}$$

$$S_0 = \int dq_e\, p_e(q_e \underset{\{I_e\}}{\underset{\updownarrow}{\{\alpha_e\}}}) \Leftarrow I_e = \frac{1}{2\pi}\oint dq_e\, p_e(q_e\{\alpha_e\})$$

$$\Rightarrow \phi_e \equiv \frac{\partial S_0}{\partial I_e} \qquad \boxed{H = \alpha_1 = H(I_1, \dots, I_f)}$$

$$\boxed{\phi_e = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_e}} \Rightarrow \boxed{\dot\phi_e = \frac{\partial H(I)}{\partial I_e}}$$

$\Rightarrow$