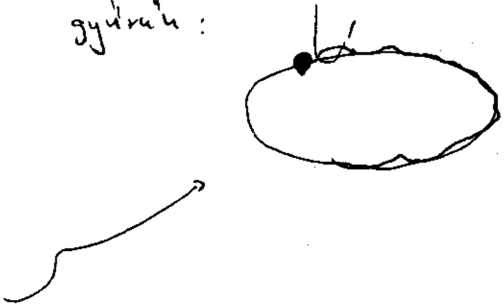
Kényszerek: D'Alembert elve

nagy energiával járó elmozdulások tiltottak

→ kényszer $V(\varrho)$

példa: gyöngy gyűrűn:



- ha elmozdul, akkor visszatérítő erő hat rá ⇒ átlaga $\underline{K}$
- nem végez munkát, mert a megengedett elm. merőleges!

$x^2+y^2 \equiv a^2$

kényszer: $\varphi^1(x,y,z) = x^2+y^2-a^2 = 0$; $\varphi^2(x,y,z) = z = 0$

- holonom (integrálható) kényszerek
- szkleronom (időben állandó)

ha a test szabadon mozogna $\underline{F}$ külső erő hatására, akkor $m\ddot{\underline{x}} = \underline{F}$ teljesülne.

hogy kövesse a kényszert → erőhatás szükséges

$$m\ddot{\underline{x}} - \underline{F} = \underline{K}$$

felületen mozgó test:

az érintő irányában ($\delta\underline{x}^*$) a mozgásegyenlet nem változik, azaz

$\forall$ $\boxed{\delta\underline{x}^* \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\underline{x}} = 0}$ -ra

$\boxed{\delta A \equiv \delta\underline{x}^* \cdot \underline{K} = 0}$ azaz $\boxed{(m\ddot{\underline{x}} - \underline{F})\,\delta\underline{x}^* = 0}$

a kényszererők virtuális munkája ⇒ követk.: $\underline{K} = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\underline{x}}$

Virtuális munka elve (D'Alembert):

kényszer jelenlétében a mozgásegy.: $\boxed{m_i\ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i + \underline{K}_i}$

szabaderő kényszererő

$\forall$ a kényszerek által megengedett irányban ($\delta\underline{x}_i^*$)

$$\boxed{\delta A = \sum_i \underline{K}_i\,\delta\underline{x}_i^* = 0}$$

a kényszererők virtuális munkája

- ha s db. holonom kényszerünk van:

$$\varphi^k(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \qquad (k = 1, \dots s)$$

$\Rightarrow$ pillanatnyi elmozdulásokra

$$\sum_i \delta\underline{x}_i^* \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}_i} = \emptyset \qquad \forall \; k\text{-ra}$$

$\Rightarrow \quad \underline{x} \equiv \{x_\nu\} = \{\underline{x}_1, \dots \underline{x}_N\}$ 3N dimenziós vektor

$$\delta\underline{x}^* \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}} = 0 \qquad \forall \; k\text{-ra} \qquad \text{és} \quad \underline{K} \equiv \{\underline{K}_1, \dots \underline{K}_N\}$$

viszont $\forall \; \delta\underline{x}^* \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}}$ -t kielégítő $\delta\underline{x}^*$-ra merőleges

$\Rightarrow$ $\underline{K}$ benne van a $\left\{\frac{\partial \varphi^1}{\partial \underline{x}}, \dots, \frac{\partial \varphi^s}{\partial \underline{x}}\right\}$ által kifeszített altérben

$$\Rightarrow \boxed{\underline{K} = \sum_k \lambda_k(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, t)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{K}_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}_i}}$$

ekkor tehát:

$$\boxed{m \ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}_i}} \qquad \underline{\text{Lagrange I}}$$

Lagrange - multiplikátorok

- D'Alembert elv nem bizonyítható, de motiválható.

pl. konzervatív erők esetén egyensúlyban, holonom kényszere

$$\underline{F}_i + \underline{K}_i = 0 \qquad \forall \; i\text{-re}$$

viszont $\underline{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i}$, és egyensúly megy. esetén

szabad egyensúly $\Rightarrow$ $U(\{\underline{x}_i\})$ min

kényszerek mellett $\Rightarrow$ $U(\{\underline{x}_i\})$ min $\varphi^k(\underline{x}, t)$ mellett

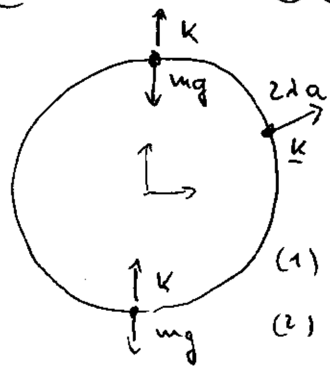
Lagrange! $\quad \tilde{U}(\underline{x}, \{\lambda^k\}) = U(\underline{x}) - \sum_k \lambda^k \varphi^k(\underline{x}, t) \quad$ min

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda^k} = 0 \Rightarrow \varphi^k(\underline{x}, t) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \underline{x}} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i} - \lambda^k \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}_i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F}_i = \underline{K}_i = \sum_k \lambda^k \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}_i} \quad ; \quad \sum_i \underline{K}_i \cdot \delta \underline{x}_i^* = \sum_s \lambda^s \frac{\partial \varphi^s}{\partial \underline{x}} \cdot \delta \underline{x}^* = \emptyset \ \checkmark$$

alkalmazás statikában:



$$\varphi = x^2 + y^2 - a^2 = \emptyset$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \underline{K} = 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad F_x + K_x = \lambda 2x = 0$$

$$(2) \quad F_y + K_y = \lambda 2y - mg = 0$$

$(1) \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm a$

$\rightarrow y = a \quad \lambda = \frac{mg}{2a} \Rightarrow \underline{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$

$\rightarrow y = -a \quad \lambda = -\frac{mg}{2a} \Rightarrow \underline{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$

Holonom vs. anholonom kényszerek:

- holonom $\quad \varphi^k(\underline{x}, t) = 0$

$$d\varphi^k = dt \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} + d\underline{x}_i \frac{\partial \varphi^k}{\partial \underline{x}_i} = \emptyset$$

- általában

$$dt\, a_0^k + \sum_i d\underline{x}_i \cdot \underline{a}_i^k = 0$$

anholonom, ha nem teljes differenciál ...

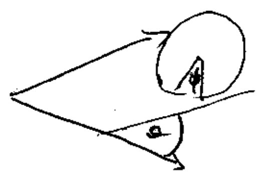
megengedett elmozdulások: $\boxed{\delta \underline{x}^* \cdot \underline{a}^k = 0}$

$$\underline{K} = \sum_k \lambda^k \underline{a}^k$$

$$\boxed{m_i \ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_s \underline{a}_i^k}$$

példa: golyó v. kerék:

$$dx = R\, d\phi \cdot \cos\vartheta$$
$$dy = R\, d\phi\, \sin\vartheta$$



$$\varphi(x, y, \vartheta, \phi) = 0$$

nem létezik, ϕ tetsz lehet egy x, y, ϑ pontban...

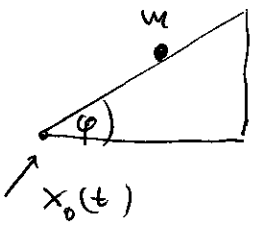
t.f.h. $\quad \underline{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i} \qquad \left(\underline{F} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{x}} \right)$

$$\sum_i m_i \ddot{\underline{x}}_i \dot{\underline{x}}_i = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i} \cdot \dot{\underline{x}}_i + \sum_k \lambda_k \underbrace{\sum_i \underline{a}_i^k \cdot \dot{\underline{x}}_i}_{-a_0^k}$$

$E = K + U \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = -\sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_0^k}$

szkleronom kényszer: $\quad a_0^k = 0 \quad \Rightarrow \quad E$ megmarad

példa:



$$y = \underbrace{tg(\varphi)}_{\alpha} \left(x - x_0(t) \right)$$

$$\varphi = \alpha \left(x - x_0(t) \right) - y = 0$$

mozgásegy.:
$$m \ddot{x} = \lambda \cdot \alpha$$
$$m \ddot{y} = -\lambda - mg$$

$$\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \quad m\alpha \ddot{x}_0 = m\alpha \ddot{x} - m\ddot{y} = \alpha^2 \lambda + \lambda + mg$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m\alpha \ddot{x}_0 - mg}{1+\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} = \frac{\alpha^2 \ddot{x}_0 - \alpha g}{1+\alpha^2}}$$

$$\frac{dE}{dt} = +\lambda \alpha \dot{x}_0 = \frac{\alpha m}{1+\alpha^2} \left(\alpha \ddot{x}_0 - g \right) \dot{x}_0 \neq \emptyset$$