Gondolkodtató feladatok

Miki

2015 ősz

Tartalomjegyzék

1. Burkológörbék **2**

2. Lagrange mechanika **2**

3. A pattogó labda esete a mátrixokkal **3**

4. A Fibonacci számok és az aranymetszés **3**

5. Romantikus alkatúaknak: Hogyan keletkezik a szivárvány? **3**

6. Még egy kis mátrixozás: Mátrixoptika **3**

7. Gerjesztett harmonikus oszcillátor megoldása Green-függvénynyel **4**

8. Diszkrét dinamika, fixpontok, határciklusok, káosz... **4**

9. Ha teszek rá súlyt, nem szakad el, ha nem teszek, elszakad, mi az? Eötvös - 2005 **5**

10. Háromszögrács diffrakció, Eötvös - 2005 **5**

11. Transzformátoros feladat, Eötvös - 2005 **5**

12. Űrhajó a csillagközi porban, Eötvös - 2006 **6**

13. Ideális vezetőkeret mágneses térben, Eötvös - 2006 **6**

14. Felületi feszültség, Eötvös-2007 **6**

15. Autotranszformátor kapcsolás, Eötvös-2007 **7**

16. Láncgörbe **7**

17. Furcsa inga, BME Fizikaverseny 2014 **7**

18. Áltudományos feladat, BME Fizikaverseny 2014 **7**

19. Csokinyuszi, BME Fizikaverseny 2014 **8**

20. Jól fókuszáló, de vastag lencse, BME Fizikaverseny 2014 **8**

21. Gurul, súrlódik, de meddig jut el? - BME Fizikaverseny 2015 **9**

22. Hengerlencsék, BME Fizikaverseny 2015 **9**

1. Burkológörbék

- Egy kicsiny locsolófej minden irányban ugyanakkora v_0 sebességgel spricceli a vizet. Milyen alakja lesz a kialakuló vízbúrának?
- Két derékszögben keresztbe rakott hurkapálcára egyenlő hosszúságú madzagokat kötözgetünk. A madzagok mindig feszesek, és az egyik végük az egyik, a másik végük a másik hurkapálcán van. Ha elegendően sűrűn madzagolunk, úgy a madzagok egy jellegzetes burkológörbét rajzolnak ki. Adjuk meg ezt a görbét!
- Egy homorú félgömb tükörre párhuzamos fénysugarak esnek. A tükörről egyszeresen visszavert sugarak burkolója milyen felület?

2. Lagrange mechanika

Elméleti mechanikából majd tanuljátok az ún. Lagrange mechanikát. Ez a feladat egy kis kedvcsináló hozzá.

- Tekintsünk egy harmonikus oszcillátort, a tömeg m, a rugóállandó D. A következő ún. Lagrange-függvény a kitérés és a sebesség függvénye:

  $$L(x,v) = E_{kin} - E_{pot} \ ,$$

  ahol $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ a mozgási energia, $E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2$ a helyzeti energia. A rendszer ún. Euler-Lagrange egyenlete a következő:

  $$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = 0 \ .$$

  Mutassuk meg, hogy ez az egyenlet éppen a Newton féle mozgásegyenletet adja!

- Tekintsünk egy l hosszúságú, m tömegű matematikai ingát. Az inga kitérését jellemezzük a φ szöggel. Adjuk meg a helyzeti és mozgási energiát a φ és $\dot{\varphi}$ segítségével, majd képezzük a Lagrange-függvényt:

  $$L(\varphi, \dot{\varphi}) = E_{kin} - E_{pot} \ .$$

  Az előző feladathoz hasonlóan írjuk fel az Euler-Lagrange egyenletet!

  $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \ .$$

  Ha jól csináltuk, ez megegyezik a Newton-egyenletből kapott mozgásegyenlettel. Csodálkozzunk rá, hogy sehol nem jelennek meg erővektorok a számításban!

- **Megmaradó mennyiségek, mint szimmetriák következményei:** Egy rendszer Lagrange-függvénye általában valamilyen általános q_i koordináták[1], $\dot{q}_i$ sebességek és az idő függvénye:

  $$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \, .$$

  Az egyes koordinátákra vonatkozó mozgásegyenleteket a

  $$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

  Euler-Lagrange egyenletek adják.[2]

  - Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény nem függ valamelyik q_i koordinátától, azaz a függvény q_i irányban eltolási szimmetriával rendelkezik. Mutassuk meg, hogy ekkor a $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ megmaradó mennyiség (azaz az időderiváltja nulla)! Ezt nevezzük (általánosított) impulzusnak.

[1] Olyan mennyiségek , melyekkel a rendszer pillanatnyi helyzete leírható.

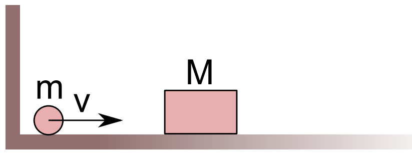
[2] Ezt úgy kell érteni, hogy minden q_i koordinátához felírjuk ezt az egyenletet, és a kapott differenciálegyenleteket kell megoldani

– Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény nem függ explicit módon az időtől: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$. Mutassuk meg, hogy ekkor az $\varepsilon = -L + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ kifejezés megmaradó mennyiség! Ezt nevezzük energiának

Azt látjuk tehát, hogy az impulzus-megmaradás a térbeli eltolási szimmetriával, az energia-megmaradás az időbeli eltolási szimmetriával kapcsolatos.

- **Kaotikus kettős inga:** Tekintsük azt a kettős ingát, melyet két m tömegű, l hosszúságú matematikai inga egymásra akasztásával nyertünk. Írjuk fel az $L = E_{kin} - E_{pot}$ Lagrange-függvényt a két inga szögének és szögsebességének függvényében! Írjuk fel az Euler-Lagrange egyenleteket! Próbáljuk meg ugyanezt megkapni a Newton-egyenletekből! Csodálkozzunk rá, mennyire hatásos a Lagrange-mechanika!

3. A pattogó labda esete a mátrixokkal



Egy M tömegű tégla súrlódásmentes asztalon nyugszik, mely egyik oldalon egy falban végződik. A fal és a tégla között található egy m tömegű golyó, melyet v sebességgel elindítunk. A golyó mind a fallal, mind a téglával rugalmasan ütközik. Összesen hányszor ütközik a téglával?

4. A Fibonacci számok és az aranymetszés

A Fibonacci számokat az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ rekurzió definiálja, ahol $a_0 = a_1 = 1$. Ezt felírhatjuk az alábbi mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Ennek segítsével állítsuk elő a Fibonacci számok explicit alakját n függvényében!

5. Romantikus alkatúaknak: Hogyan keletkezik a szivárvány?

Vizsgáljuk meg a fénysugarak pályáját, ha gömb alakúnak feltételezett vízcseppen szóródnak, törnek és visszaverődnek! Ez alapján értelmezzük a következőket:

- Miért látunk szivárványt? Miért ott látjuk, ahol látjuk?
- Hogyan jönnek a színek sorban?
- Hogyan tudjuk magyarázni, hogy néha kettős szivárványt látunk?
- Milyen a második szivárványban a színek sorrendje?

6. Még egy kis mátrixozás: Mátrixoptika

Geometriai optikában gyakran alkalmazzuk az ún. paraxiális közelítést. Ekkor bevezetve a fénysugár iránytangensét, és az optikai tengelytől mért távolságát, az egyes egyszerű optikai elemek (pl. lencse) hatása egyszerű mátrixszorzással írható le.

- Adjuk meg a szabad terjedés mátrixát!
- Adjuk meg egy lencse mátrixát!
- Építsük össze a Kepler távcsövet, és számítsuk ki a leképzését!

7. Gerjesztett harmonikus oszcillátor megoldása Green-függvénnyel

Tekintsünk egy harmonikus oszcillátort! (D, m). Tegyük fel, hogy kezdetben nyugalomban volt, amikor a t_0 időpontban egy $P = F\Delta t$ erőlökés érte. Adjuk meg az oszcillátor mozgását a $t > t_0$ időpontokra! Ennek ismeretében adjunk egy eljárást arra, hogy tetszőleges $F(t)$ gerjesztés esetén hogyan adhatjuk meg az oszcillátor kitérés-idő függvényét. Ismételjük meg a számítást egy csillapított oszcillátor esetén is!

8. Diszkrét dinamika, fixpontok, határciklusok, káosz...

- Egy $x \to f(x)$ leképzés fixpontjának nevezzük azokat az x^* pontokat, melyekre $f(x^*) = x^*$. A fixpont stabilis, ha hozzá közeli $x^* + \delta x$ pontot leképezve a fixponthoz közeledünk.

  Tekintsük az $f(x) = 1 - a * x$ leképzést. Hol van a fixpontja? Mely a-kra stabilis, melyekre nem?

  Tekintsük a $g(x) = 1 - x^2$ leképzést? Hol vannak a leképzés fixpontjai? Milyenek ezek?

- Oldjuk meg numerikusan (fixpont iterációval) az alábbi transzcendens (zárt alakaban nem megoldható) egyenleteket!

  $$x = \cos(x)$$
  $$x = e^{-x}$$
  $$x = 2\tanh(x)$$

  Próbáljuk hasonlóan megoldani a következő egyenletet:

  $$x = 4e^{-x}$$

  Ha nem sikerült, próbáljunk trükközni!

- Tekintsük az ún. pék-leképzést:

  $$x \to 2|x - 0.5|$$

  Keressünk fixpontokat!

  Tekintsük az $x_n = 2|x_{n-1} - 0.5|$ iterációval kapott diszkrét mozgást. Keressünk periodikus megoldásokat. ($x_n = x_{n-k}$ valamilyen k-ra.) Játsszunk a leképzéssel, indítsunk el közeli helyről pontokat, és nézzük azok mozgását! Mit tapasztalunk?

- Tekintsük az ún. logisztikus leképzést!

  $$x \to rx(1 - x)$$

  Keressük meg ennek fixpontjait! Mit mondhatunk a fixpont stabilitásáról r függvényében?

  Vizsgáljuk az $x_n = rx_{n-1}(1-x_{n-1})$ iterációval nyert diszkrét mozgást! Játsszunk az r paraméterrel! Mit kapunk?

- Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

  $$\dot{x}(t) = -x(t) \qquad x(0) = 1$$

  Ha mindkét oldalt integráljuk az idő szerint 0-tól t-ig, úgy a következőt kapjuk formálisan:

  $$x(t) - x(0) = -\int_0^t x(t')dt'$$

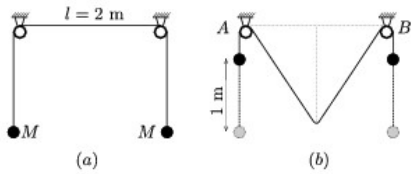
  Átrendezve:

  $$x(t) = x(0) - \int_0^t x(t')dt'$$

  Ez formálisan egy fixpont egyenlet az $x(t)$ függvényre. Matekból majd bizonyítjátok, hogy ez a fixpont stabil. Kezdjük el iterálni! Legyen $x^{(0)}(t) \equiv 1$.

  Mi lesz $x^{(1)}(t)$? És $x^{(2)}(t)$? Rajzoljuk fel az iteráció eredményeit!

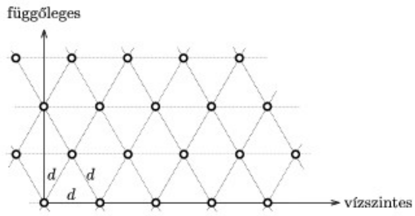
9. Ha teszek rá súlyt, nem szakad el, ha nem teszek, elszakad, mi az? Eötvös - 2005



Két rögzített, egymástól $l = 2m$ távolságra levő csigán erős, de nem nyúlékony fonalat vezetünk át, és a végeire egy-egy M=1 kg tömegű testet erősítünk az (a) ábra szerint. (A fonal néhányszor 10 N terhelést bír ki szakadás nélkül. A csigák és a fonal tömege elhanyagolható.) Ha ujjunkkal lehúzzuk a fonal közepét úgy, hogy a két test 1-1 méterrel megemelkedjék ((b) ábra), majd elengedjük, a fonal elpattan, amikor A és B között ,,kiegyenesedik". Ha azonban úgy engedjük el, hogy előbb egy ugyancsak 1 kg tömegű testet erősítünk a fonal közepéhez, akkor a fonal a továbbiakban nem szakad el.

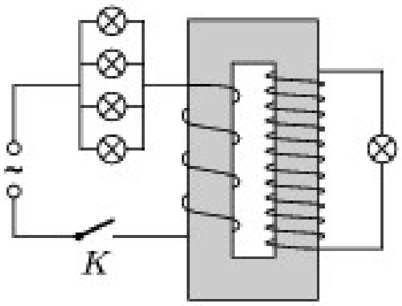
- Magyarázzuk meg a jelenséget!
- Mekkora erő feszíti a fonalat abban a pillanatban, amikor kiegyenesedik?

10. Háromszögrács diffrakció, Eötvös - 2005



Egy átlátszatlan lapon kicsiny lyukak vannak az ábrán látható ,,háromszög-rács" elrendezésben. A lapot monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézerfénnyel világítjuk meg merőlegesen. A rácsállandó $d = 100\lambda$. Ábrázoljuk vázlatosan (a méretek, valamint a vízszintes és a függőleges irányok bejelölésével), hogy milyen elhajlási képet figyelhetünk meg a rácstól $3m$ távolságra elhelyezett ernyőn!

11. Transzformátoros feladat, Eötvös - 2005



Egy jó minőségű transzformátor szekunder tekercsének menetszáma háromszorosa a primer tekercsének. Ezt a trafót az ábra szerint hálózati váltóáramú feszültségforrásra kapcsoljuk a következő módon: A primer körbe egymással párhuzamosan iktatunk be öt egyforma, a hálózati feszültségre méretezett izzó közül négyet, az ötödiket a szekunder körbe kötjük. Mi történik a K kapcsoló zárása után?

12. Űrhajó a csillagközi porban, Eötvös - 2006

Egy bolygóközi pályán mozgó űrszonda, pályájának bizonyos részén, egy ott elhelyezkedő kozmikus ,,porfelhőn" haladt át. Mindazon porszemcsék, amelyeknek nekiütközött, ráragadtak a szondára. Mire a szonda kiért a porfelhőből, tömege 2%-kal megnőtt.

Hány százalékkal nőtt meg a porfelhőn való áthaladás ideje ahhoz képest, amennyi idő alatt a porfelhő fékező hatása nélkül tette volna meg a szonda ugyanezt az utat?

(A porfelhőt állandó sűrűségű, határozott szélű objektumnak tekinthetjük.)

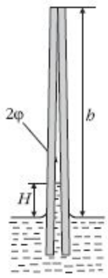
13. Ideális vezetőkeret mágneses térben, Eötvös - 2006

Négyzet alakú, rövidre zárt lapos tekercs anyaga szupravezető (ellenállása elhanyagolható). A négyzet oldalélei l hosszúak, egy-egy oldalának tömege m. A tekercs, amelynek induktivitása L, súrlódásmentesen elfordulhat a négyzet alsó, vízszintes oldala körül.

Kezdetben a tekercs függőlegesen, labilis egyensúlyi helyzetben áll a földi nehézségi erőtérben. Ezután egy olyan homogén mágneses mezőt alkalmazunk, hogy a tekercsre ható **B** mágneses indukció vektor nagysága állandó, iránya függőleges legyen. Ekkor a tekercsben nem folyik áram.

Ezután a tekercs felső végét kicsiny v_0 sebességgel meglökjük. Körbefordul-e a tekercs, vagy ha nem, akkor milyen határok között fog mozogni?

14. Felületi feszültség, Eötvös-2007



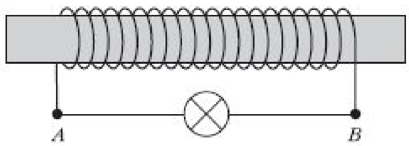
Két téglalap alakú üveglemezt egyik élük mentén egymáshoz támasztunk úgy, hogy 2φ szöget zárjanak be egymással. Az így rögzített lemezeket lassan vízbe engedjük az ábrán látható módon. A víz, amely tökéletesen nedvesíti az üveget, a felületi feszültség hatására a két lemez között bizonyos H magasságig felemelkedik. Mekkora ez a H magasság, ha a lemezek vízszintesen tartott érintkezési vonala

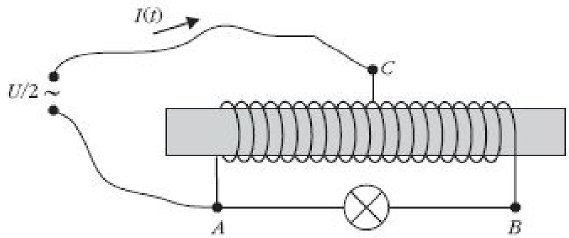
- h = 30 mm,
- h = 15 mm

távolságra van a szabad vízfelszíntől? Ábrázoljuk vázlatosan, hogyan változik H a fokozatosan csökkenő h függvényében!

Feltehetjük, hogy a lemezek egymással érintkező éle sokkal hosszabb, mint h, továbbá a lemezek szimmetriasíkja mindvégig függőleges.

Adatok: $\sigma_v = 0{,}072 N/m$, $\rho_v = 1000 kg/m^3$, $2\varphi = 6°$.





15. Autotranszformátor kapcsolás, Eötvös-2007

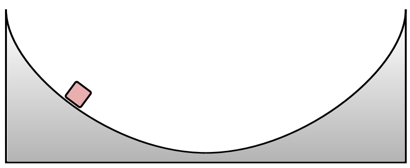
Egy terebélyes vasmaggal ellátott, nagy önindukciójú, de mégis elhanyagolható ohmikus ellenállású tekercs végeit U feszültségre méretezett izzón keresztül kötjük össze. Ha az A és B pontok közé $U/2$ effektív értékű váltakozó feszültséget kapcsolunk, az izzó nagyon halványan világít.

Mivel a tekercs közepéről is van egy C kivezetés, megpróbáljuk a feszültségforrás pólusait az A és C pontokhoz kötni. Megváltozik-e az izzón átfolyó áram erőssége, és ha igen, hogyan? Az ábrán bejelöltük a főágban folyó $I(t)$ pillanatnyi áram irányát. Hogyan folyik az áram ugyanekkor a tekercsben?

16. Láncgörbe

Egy nyújthatatlan de hajlékony lánc két végpontját rögzítettük, a lánc saját súlya miatt jellegzetes láncgörbe alakot vesz fel. Milyen görbe ez? Vezessük le!

17. Furcsa inga, BME Fizikaverseny 2014



Legyen adott egy ciklois alakú vájat, amiben egy pontszerű test súrlódásmentesen mozog. A ciklois paraméteres egyenlete a következő:

$$
\begin{aligned}
x(s) &= r(s + \sin s) \\
y(s) &= r(1 - \cos s)
\end{aligned}
$$

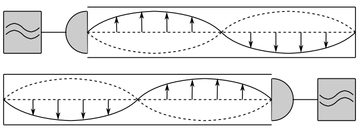
Engedjük el a pontszerű tömegpontot a pálya egy $H < 2r$ magasságú pontjából. Mennyi idő alatt ér vissza a tömegpont a kiindulási helyére H függvényében? Milyen gyakorlati felhasználása lehet ennek?

18. Áltudományos feladat, BME Fizikaverseny 2014

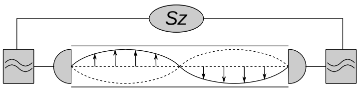
Hungotánia kis ország. Energiaforrásokban és ásványkincsekben szegény ugyan, de dolgos és innovatív emberek lakják. A NIHIL (Nemzeti Intézeti Hungotániai Innovációs Laboratórium) 2014-ben pályázatot írt ki olcsó és hatékony energiatermelési módok kidolgozására.

Önt kérték fel az egyik pályázat bírálatára. A NIHIL kérése, hogy **részletesen** elemezze a pályázatban leírt módszert! A reményt keltő pályázat az alábbi volt:

Az EMTEG (ElektroMágneses Tér Energia Generátor) működési elve:



Adott egy fémcső, melynek egyik végét egy fémdugóval lezárjuk, a másik végén egy elektromágneses hullámokat generáló antenna van. Ez a csőben elektromágneses állóhullámot kelt, melynek amplitudóját jelöljük E_0-lal. A fémcső falának kicsiny, de véges ellenállása miatt folyamatosan melegszik. A generátor által leadott teljesítmény $P = \alpha E_0^2$, ahol α a fémcsőre jellemző állandó. Ha megcseréljük a dugót és a generátort, ugyanilyen állóhullámot kapunk.



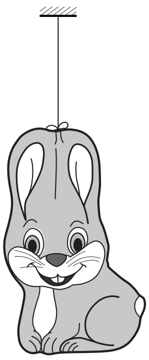
Most helyezzünk a cső mindkét végére generátort, melyeket az Sz-szel jelölt szinkronizátor úgy hangol össze, hogy a két állóhullám konstruktívan interferáljon. Ekkor a generátorok által leadott teljesítmény $P_{be} = 2P = 2\alpha E_0^2$ lesz, míg a fémcsövet melegítő teljesítmény, mely az elektromos tér négyzetével arányos, $P_{ki} = \alpha(2E_0)^2 = 4\alpha E_0^2$. Köszönhetően az interferenciának a betáplált teljesítmény dupláját kaptuk.

Az így nyert energia hő formájában elvezethető és felhasználható.

Keskeny Gábor
Inventor

Nyilvánvaló, hogy ez az energiaforrás Hungotániát energetikai nagyhatalommá teszi, amely egyben (hosszútávon) világbirodalmi státuszt is jelenthet.

19. Csokinyuszi, BME Fizikaverseny 2014

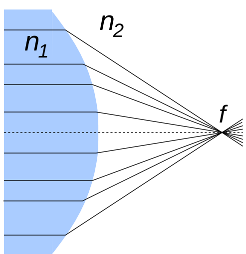


Szigetelő szálra függesztett, alufóliával bevont csokoládényuszit elektromosan feltöltöttünk. A nyuszi a levegő csekély σ vezetőképessége miatt lassan elveszíti töltését.

a) Mennyi idő alatt csökken a nyuszi töltése a felére?

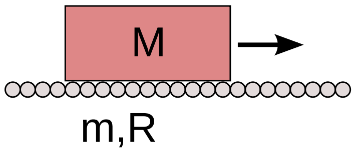
b) Milyen lesz kisülés közben a nyuszi körül kialakuló mágneses mező?

20. Jól fókuszáló, de vastag lencse, BME Fizikaverseny 2014



n_1 és n_2 törésmutatójú közegek határfelülete forgásfelület. Az egyik oldalról (a szimmetriatengellyel párhuzamosan) fénysugarak érkeznek a határfelületre. Milyen alakú legyen a határfelület, ha azt szeretnénk elérni, hogy valamennyi megtört fénysugár a tengelynek a határfelülettől f távolságban lévő pontján haladjon át? Ideális lencseként viselkedik ez a rendszer?

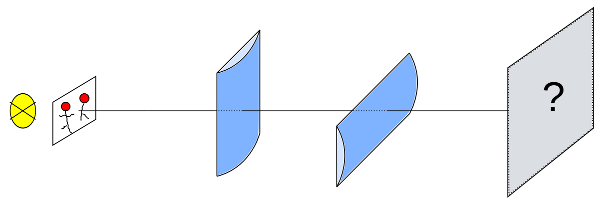
21. Gurul, súrlódik, de meddig jut el? - BME Fizikaverseny 2015



Egy M tömegű láda kicsiny tömör, homogén hengerekből kialakított görgősoron halad. A görgők kicsik (mind tömegük, mind sugaruk sokkal kisebb a doboz méreteinél), sugaruk R, tömegük m, a tengelyek távolsága alig nagyobb $2R$-nél, de egymással nem súrlódnak. A láda elegendően tapad a görgőkhöz, hogy azok elérik a tiszta gördülés állapotát, mielőtt a láda túlhaladna rajtuk.

A ládát a görgősor elején v_0 sebességgel indítva mennyi idő alatt jut el az L távolságban lévő célig?

22. Hengerlencsék, BME Fizikaverseny 2015



Van két speciális hengerlencsénk, melyek egy R sugarú egyenes üveg körhenger széléből lettek levágva, azaz egyik oldaluk a henger palástja, másik oldaluk sík (lásd ábra.). Tudjuk, hogy egy ugyanilyen egyik oldalról sík, másik oldalról R görböleti sugarú szokásos gömblencse fókusztávolsága $f = 20\,\text{cm}$. Egy áttetsző papírra kinyomtatott fényképet hátulról megvilágítottunk, tőle pedig $d = 150\,\text{cm}$ távolságra elhelyeztünk egy ernyőt. A két hengerlencsét úgy rakjuk le, hogy az egyik tengelye vízszintesen, a másik függőlegesen áll. (lásd ábra.)

a.) Hova helyezzük a két lencsét, ha az ernyőn éles képet szeretnénk látni?
b.) Hogyan néz ki a kép?
c.) Ha a megvilágított fénykép területe A, mekkora az ernyőn kialakult kép területe?
d.) Mi történik, ha a két lencsét kicserélem?