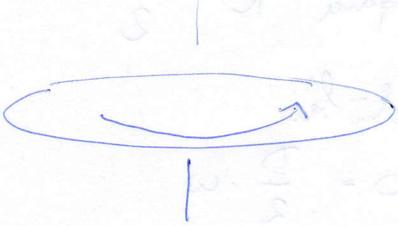
11A-5

5. Gyakorlat



$$n_0 = 33{,}33.. \frac{\text{fordulat}}{\text{perc}}$$

$$\beta = -0{,}2 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{n_0}{60} = 3{,}491 \frac{1}{s}$$

a.)

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t$$

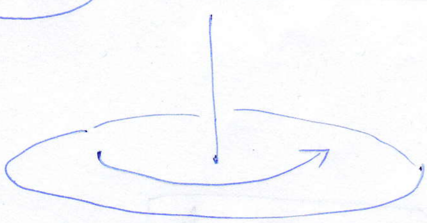
$$\omega(t_f) = \varnothing \qquad \omega_0 + \beta \cdot t_F = \varnothing \qquad t_F = -\frac{\omega_0}{\beta} = -\frac{3{,}491}{-0{,}2} = \underline{\underline{17{,}45\,s}}$$

b.)

$$\Delta\varphi_{tot} = \omega_0 \cdot t_F + \frac{\beta}{2} \cdot t_F^2 = 30{,}47 \text{ (rad)}$$

$$n_{tot} = \frac{\Delta\varphi_{tot}}{2\pi} = \underline{\underline{4{,}85 \text{ fordulat}}}$$

11B-6



$$n_0 = 2000 \frac{\text{fordulat}}{\text{perc}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{60} \cdot n_0 = 209{,}44 \frac{1}{s}$$

$$\beta = -100 \frac{(\text{rad})}{s^2}$$

ellenkező irányba szöggyorsít, mint ahogy eredetileg forog.

$$n_{vég} = -2000 \frac{\text{fordulat}}{\text{perc}} \Rightarrow -209{,}44 \frac{1}{s} = \omega_{vég}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t$$

$t_{át}$: $\omega(t_{át}) = \omega_{vég}$

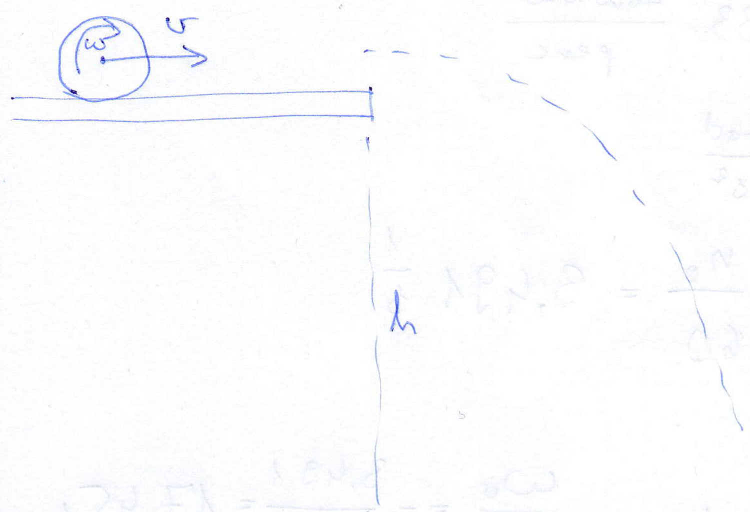
$$\omega_0 + \beta \cdot t_{át} = \omega_{vég} \Rightarrow \quad t_{át} = \frac{\omega_{vég} - \omega_0}{\beta} = \frac{-2 \cdot 209{,}44}{-100} =$$

$$\boxed{t_{át} = 4{,}19\,s}$$

b.) $t_f = \frac{t_{át}}{2}$ a félidő

$$\Delta\varphi = \omega_0 \cdot t_f + \frac{\beta}{2} t_f^2 = 219{,}3 \text{ (rad)} \rightsquigarrow \boxed{n_{tot} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \underline{\underline{34{,}9 \text{ fordulat}}}}$$

11B-13



A labda átmérője D, sugara $R = \frac{D}{2}$

Tiszta gördülés

$$v = R \cdot \omega = \frac{D}{2} \cdot \omega$$

$$\hookrightarrow \omega = \frac{2v}{D}$$

Zuhanás ideje:

$$\frac{g}{2} \cdot t_z^2 = h$$

$$t_z = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\hookrightarrow \Delta\varphi = \omega \cdot t_z = \frac{2v}{D} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\boxed{n = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{v}{D \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

12B-13

$$\vec{r} = (5m, 12m, 0)$$

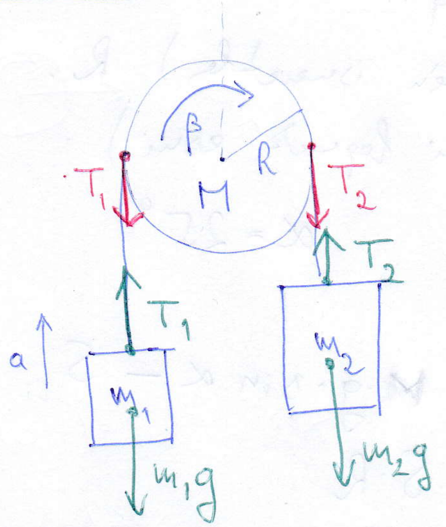
$$\vec{F} = (4N, 3N, 0)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5m & 12m & 0 \\ 4N & 3N & 0 \end{vmatrix} = k \cdot (15 - 48) = \boxed{-33\ Nm \cdot k}$$

Nagyság: 33 Nm

Irány: z irányban, lefelé.

12B - 19



$R = 10\,cm = 0{,}1\,m$

$M = 5\,kg$ $\Big\}$ $\Theta = \frac{1}{2} M R^2 = 0{,}025\,kg\,m^2$

$m_1 = 2\,kg$

$m_2 = 4\,kg$

Kötél nem csúszik meg.

$\rightsquigarrow v = R \cdot \omega$

$\boxed{a = R \cdot \beta}$ $\frac{d}{dt}$

Mozgásegyenletek:

$m_1 \cdot a = T_1 - m_1 \cdot g$

$m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - T_2$

$\Theta \cdot \beta = T_2 \cdot R - T_1 \cdot R$

$\frac{1}{R}$

$\frac{\Theta}{R^2} \cdot a = T_2 - T_1$

Tehát:

$\frac{\Theta}{R^2} \cdot a = T_2 - T_1$

$m_1 \cdot a = T_1 - m_1 g$

$m_2 \cdot a = m_2 g - T_2$

Adjuk össze a három egyenletet (ekkor a "T"-k épp kiesnek)

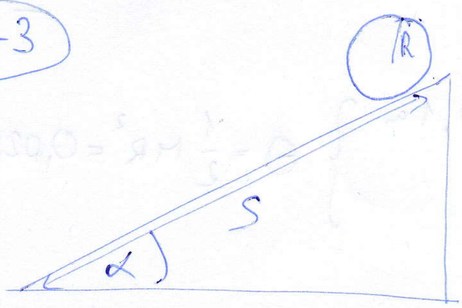
$\left(m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2}\right) \cdot a = m_2 g - m_1 g$

$$\boxed{a = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2}}\, g = 2{,}31\,\frac{m}{s^2}}$$

$T_1 = m_1 \cdot (a + g) = \underline{\underline{24{,}24\,N}}$

$T_2 = m_2 (g - a) = \underline{\underline{30\,N}}$

13A-3



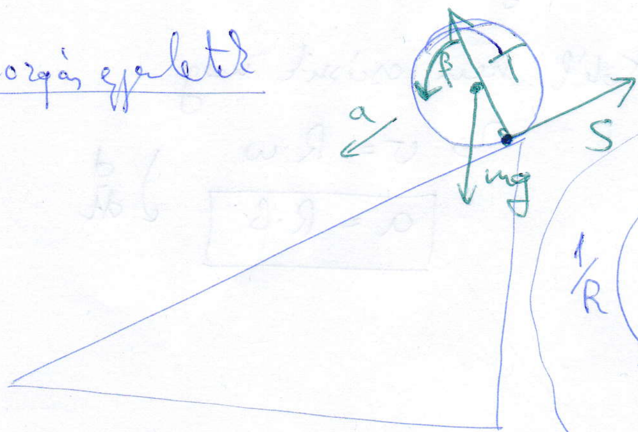
Gömb tömege (ismeretlen) legyen M

Sugara (szintén ismeretlen) R.

(Ezek mind ki fognak esni)

$\Theta_{gömb} = \frac{2}{5} M R^2$ $\qquad \alpha = 25°$

<u>Mozgásegyenletek</u>



$M \cdot a = M \cdot g \cdot \sin\alpha - S$

$\Theta \cdot \beta = S \cdot R$ $\quad \frac{1}{R}$

Tiszta gördülés: $a = R \cdot \beta$

$$\frac{2}{5} M \cdot a = S$$

$$+ \quad M \cdot a = Mg \sin\alpha - S$$

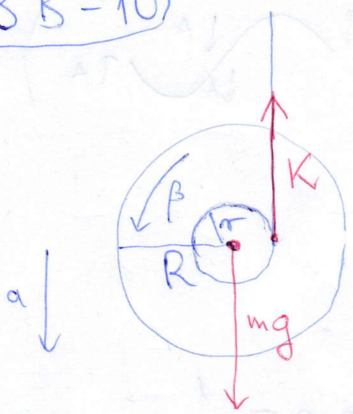
$$\frac{7}{5} M a = Mg \sin\alpha$$

$$a = \frac{5}{7} g \cdot \sin\alpha = 3{,}02 \frac{m}{s^2}$$

$s = 6\,m$

$v_{vég} = ?$ $\quad v_{vég} = \sqrt{2 s \cdot a} = \underline{\underline{6{,}02 \frac{m}{s}}}$

13B-10



$m = 200\,g = 0{,}2\,kg$ $\quad R = 2\,cm = 0.02\,m$

$\Theta = \frac{1}{2} m R^2$ $\quad r = 0.2\,cm = 0{,}002\,m$

Tiszta gördülés (A belső tengelyen)

$$a = r \cdot \beta$$

Mozgásegyenletek:

$$m \cdot a = m \cdot g - K$$

$$\Theta \cdot \beta = K \cdot r$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{a}{r} = K \cdot r$$

$$\frac{1}{2} m \frac{R^2}{r^2} \cdot a = K$$

Tehát: $m \cdot a = mg - K$

$$+ \quad \frac{1}{2} m \frac{R^2}{r^2} a = K$$

$$m \cdot \left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right) a = mg$$

$$\boxed{a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}$$

$$\boxed{a = 0{,}192\,\frac{m}{s^2}}$$

$s = 1\,m$

$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$

$\hookrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \underline{\underline{3{,}225\,s}}$

b.) $v = a \cdot t = \cancel{\frac{g \cdot t}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}$ $\qquad E_{transz} = \frac{1}{2} m v^2$

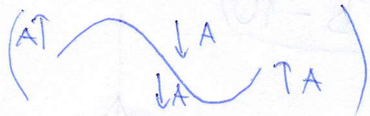
$\omega = \beta t = \frac{a}{r} \cdot t = \frac{v}{r}$ $\qquad E_{forg} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} =$

$$= \underbrace{E_{transz}}_{\frac{1}{2} m v^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2}\right)}_{50}$$

Tehát $\boxed{E_{forg} = 50 \cdot E_{transz}}$

15A – 1 $\quad m = 20\,g \quad f = 3\,Hz \quad A = 5\,cm$

a.) $S_{tot}^{1\ \text{periódus}} = 4 \cdot A = \underline{\underline{20\,cm}}$



b.) $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

↳ $v_{max} = A \cdot \omega \qquad \omega = 2\pi \cdot f = 18{,}85\ \frac{1}{s}$

↳ $\boxed{v_{max} = 0{,}9425\ \frac{m}{s}}$

↳ cos ott maximális, ahol a szinusz nulla.

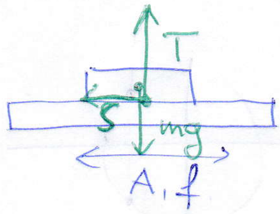
↳ A rezgés középpontjában.

c.) $a(t) = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad (= -\omega^2 \cdot x)$

$a_{max} = A \cdot \omega^2 = 17{,}77\ \frac{m}{s^2}$

Ott lép fel, ahol x maximális. (szélső helyzetben)

(15B-5)



$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

↳ A visszatérítő gyorsulás maximuma $A \cdot \omega^2$.

A pénzérmére visszatérítően csak a tapadási súrlódási erő hat.
Ennek maximális értéke $S_{max} = \mu_s \cdot T = \mu_s \cdot m \cdot g$

Ahhoz, hogy ne csússzon meg:

$$S_{max} \geq m \cdot a_{max} = m A \omega^2$$

$$\mu_s m g \geq m A \omega^2$$

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{A\omega^2}{g} = 4\pi^2 \frac{A f^2}{g}}$$

(15B-6)

$$x(t) = 2 \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$$

amplitudó — körfrekvencia — kezdőfázis.

$\boxed{A = 2\,m}$

$\omega = 10\,\frac{1}{s}$ ⇒ Periódusidő $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}628\,s}$

frekvencia $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.59\,Hz}$

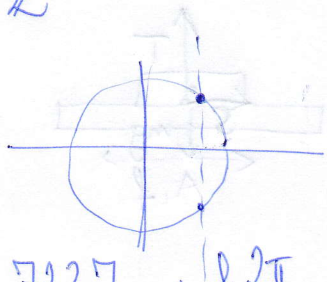
Sebesség: $\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = -20 \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)}$

Gyorsulás $\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = -200 \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)}$

$\underline{x(t = 0{,}2\,s)} = 2 \cdot \cos\left(2 + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{-1.874\,m}$

rad!

$x=0 \Rightarrow 10t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \quad k\in\mathbb{Z}$



$x=1{,}5\,m \Rightarrow \cos\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 10t+\frac{\pi}{2}=\pm 0.7227+k2\pi.$

Több megoldás van.

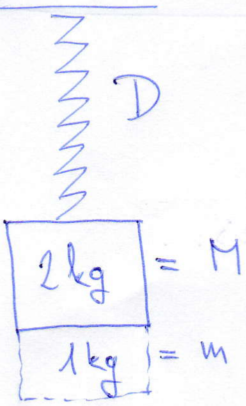
pl. $x=0$-ól legyen $10t_1+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$

$x=1.5$-ól $10t_2+\frac{\pi}{4}=-0.7227$

$$10\cdot(t_2-t_1)=\frac{\pi}{2}-0.7227$$

$$t_2-t_1=\frac{\pi}{20}-0.07227=\underline{0.0848\,s}$$

15B-13



$D=240\frac{N}{m}$

$M=2kg$

$m=1kg$

A rugó eredeti egyensúlyi helyzete:

$$D\cdot x_{e,0}=M\cdot g$$

$$x_{e,0}=\frac{M\cdot g}{D}$$

A szétkapcsolás után

$$x_{e,1}=\frac{(M+m)g}{D}$$

$\Rightarrow$ Kezdetben az új egyensúlyi helyzettől $\Delta X=x_{e,1}-x_{e,0}=\frac{mg}{D}$ távolságra van.

0 kezdősebességgel indul.

$\Rightarrow A=\frac{mg}{D}$ lesz az amplitúdó.

a.) Az egyensúlyi helyzettől mérve a $+A$ helyzetből indul. Maximálisan a $-A$ helyzetbe jut el $\Rightarrow$ Maximális süllyedés $2A=\frac{2mg}{D}=\underline{0{,}0833\,m}$

b.) Az össztömeg $M+m \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{D}{M+m}}$

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{M+m}}=\underline{1{,}42\,Hz}$$

15 B 26

R=0,2m

→ A TKP-re vonatkozó Θ:

$$\Theta_{TKP} = m \cdot R^2$$

→ A felfüggesztési pontra, Steiner tétellel:

$$\Theta = \Theta_{TKP} + m s^2 =$$

$$= mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

→ A lengésidő: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} =$

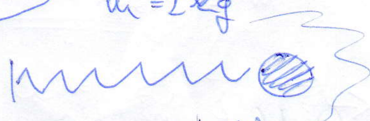
$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

→ $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell^*}{g}}$ matematikai inga esetén.

↳ $\ell^* = 2R$ a megfelelő (ún. redukált) ingahossz.

15 B 28

m = 2 kg



$D = 200 \frac{N}{m}$

$-k \cdot v$ csillapítás.

$x_0 = 0{,}2\,m$

$v_0 = \emptyset$

6 s múlva az amplitúdó 0,16 m.

? k = ?

? ω_{rez} = ?

A mozgásegyenlet: $m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x - k\dot{x}$

Átrendezve: $m \cdot \ddot{x} + D \cdot x + k\dot{x} = \emptyset$ // m

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x + \frac{k}{m} \dot{x} = \emptyset$$

Szokás bevezetni: $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

$2\alpha = \frac{k}{m}$

Ezekkel

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} = 100\,\frac{1}{s^2}$$

Egy ilyen egyenlet általános megoldása: $x(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$

ahol $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

A kezdeti feltétel illesztése:

$x(0) = x_0 \Rightarrow A \cdot \sin\varphi = x_0$

$\dot{x}(0) = v_0 = 0 \Rightarrow A \cdot \omega \cdot \cos\varphi - A \cdot \alpha \cdot \sin\varphi = 0$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{\alpha}}$$

6 s múlva az amplitúdó:

$$A \cdot e^{-\alpha \cdot 6\,s} = 0.16\,m$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{\alpha^2}}{1+\frac{\omega^2}{\alpha^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\omega_0^2}{\alpha^2} - 1}{\frac{\omega_0^2}{\alpha^2}}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}$$

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\frac{x_0}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}}\, e^{-\alpha\, 6\,s} = 0.16$$

$$\frac{0.2}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{100}}} \cdot e^{-6\alpha} = 0{,}16$$

$$\boxed{\alpha = 0.03719}$$

(Igazából $A_0 \approx x_0 \Rightarrow$ így egyszerűbb számolni)

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} = \boxed{99{,}99986\,\frac{1}{s}}$$