

Név:

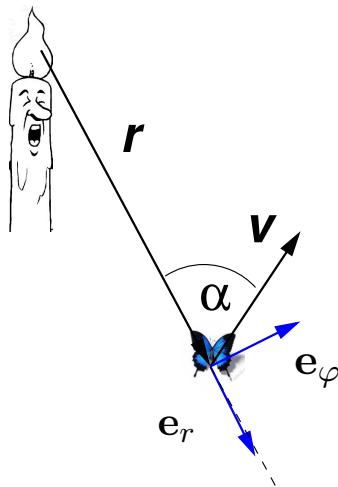
Pontszám:

Számítási Módszerek a Fizikában ZH 1

1. Feladat

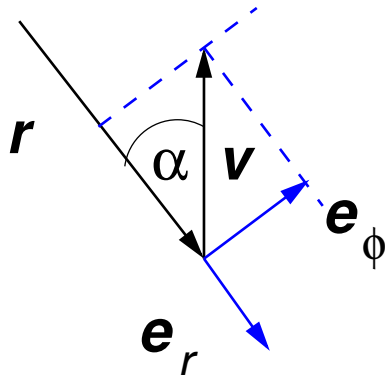
20 pont

Az éjszakai pillangók a Hold fénye alapján tájékozódnak: úgy repülnek, hogy a Holdat állandó szög alatt lássák! (A lepkétől a Hold felé mutató vektor és a sebességük által bezárt szög állandó.) Sajnos a lepkék gyakran összetévesztik a Hold fényét egy gyertya fényével, amely számukra végzetes következményekkel jár.



Kezdetben a lepke r_0 távolságra van a gyertya lángjától. Adjuk meg a lepke sebességének $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\phi$ vektorokkal párhuzamos komponenseit! Hogyan változik időben a lepke távolsága a gyertyától, ha a sebességének a nagysága állandó? Mennyi ideig lesz még életben a lepke? (Használjunk polár koordinátákat!)

Megoldás:



Az ábráról leolvasható:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -v \cos(\alpha) \\ r\dot{\phi} &= v \sin(\alpha) \\ r &= r_0 - v \cos(\alpha)t \\ t_0 &= \frac{r_0}{v \cos(\alpha)},\end{aligned}$$

ahol t_0 az az idő, amely alatt a lepke a gyertya lángjába ér.

2. Feladat

20 pont

Számítsuk ki a rotációját henger koordináta rendszerben a következő vektortérnek:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

ahol $\mathbf{m}$ egy állandó vektor! Célszerű a z tengely irányát $\mathbf{m}$ -mel párhuzamosan választani.

Megoldás:

Válasszuk a z tengelyt $\mathbf{m}$ -mel párhuzamosan! Ekkor

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

és az $\mathbf{r}$ hossza $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. A helyvektort a hengerkoordináta rendszer egységvektoraival a következőképpen adhatjuk meg: $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$, ahol

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Írjuk fel először az $\mathbf{A}$ vektorteret a henger koordinátákkal:

$$\mathbf{A} = \frac{m \mathbf{e}_z \times (\rho \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_\varphi)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{m \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\varphi = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

tehát a vektortérnek csak A_φ komponense van. Használjuk fel a rotáció képletét:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z.$$

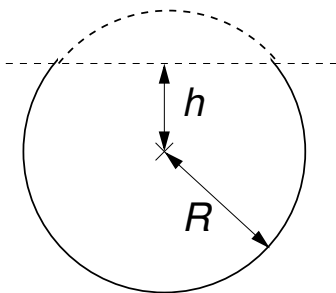
Miután csak A_φ komponensünk van

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) \right) \mathbf{e}_z.$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \frac{m \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} &= 3m \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{m \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} &= m \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \rho, \end{aligned}$$

vagyis

$$\nabla \times \mathbf{A} = m \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_r + m \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z.$$



Egy homogén ρ sűrűségű, R sugarú gömb tetejét a középpontjától h magasságban a sugarára merőleges síkkal lemetszük. Határozzuk meg az így kapott testnek a tömegközéppontját! Dolgozzunk henger koordináta rendszerben!

Megoldás:

A tömegközéppont meghatározásához két integrált kell meghatároznunk:

$$M = \rho \int dV \qquad \mathbf{r}_{tkp} = \frac{1}{M} \rho \int \mathbf{r} dV$$

Először számítsuk ki az első integrált! Henger koordináta rendszerben az r sugarú a z magasság függvénye: $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, ahol R a csonkolt gömb sugara. Figyelembe véve, hogy a Jacobi determináns r , a hármas integrál a következő lesz:

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_{-R}^h dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\rho\pi \int_{-R}^h dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr = 2\rho\pi \int_{-R}^h dz \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \\ &= \rho\pi \int_{-R}^h (R^2 - z^2) dz = \rho\pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_{-R}^h = \rho\pi \left((R^2 h + R^3) - \frac{1}{3} (h^3 + R^3) \right) \end{aligned}$$

Ellenőrzésként ha $h = R$, akkor visszkapjuk a gömb $V = 4/3\pi R^3$ térfogatát. Határozzuk meg a második integrált is. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a henger szimmetria miatt csak a tömegközéppont z komponense különbözik nullától. Az integrálási határok változatlanok maradnak, csak az integrandus módosul:

$$\begin{aligned} z_{tkp} &= \frac{1}{M} \rho \int_{-R}^h z dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{M} 2\rho\pi \int_{-R}^h z dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr = 2 \frac{1}{M} \rho\pi \int_{-R}^h dz \frac{1}{2} z r^2 \Big|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \\ &= \frac{1}{M} \rho\pi \int_{-R}^h z (R^2 - z^2) dz = \frac{1}{M} \rho\pi \left(\frac{1}{2} R^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_{-R}^h = \frac{1}{M} \rho\pi \left(\frac{1}{2} (R^2 h^2 - R^4) - \frac{1}{4} (h^4 - R^4) \right) \\ &= -\frac{1}{4M} \rho\pi (h^2 - R^2)^2 \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az M tömeget:

$$z_{tkp} = \frac{3}{4} \frac{(h^2 - R^2)^2}{2R^3 + 3R^2 h - h^3}$$

4. Feladat

20 pont

Határozzuk meg egy R sugarú gömbre a felhajtó erő nagyságát, ha a nyomás a következőképpen változik a magassággal:

$$p = p_0 e^{-\frac{z+R}{z_0}} .$$

A gömb középpontja az origóban van.

Megoldás:

Dolgozzunk gömbi koordináta rendszerben. A kiszámítandó integrál:

$$\mathbf{F} = - \oint p d\mathbf{A} .$$

A felületelem vektor:

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \times r \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Az integrál egyes komponensei tehát:

$$F_x = -p_0 e^{-\frac{R}{z_0}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-\frac{R \cos(\vartheta)}{z_0}} R^2 \sin^2(\vartheta) \cos(\varphi) d\vartheta = 0 ,$$

nyilvánvalóan a $\cos(\varphi)$ integrálja eltűnik. Hasonlóan eltűnik az erő y komponense is, így csak a z irányú összetevőt kell meghatároznunk:

$$F_z = -p_0 e^{-\frac{R}{z_0}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-\frac{R \cos(\vartheta)}{z_0}} R^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta = -2\pi p_0 e^{-\frac{R}{z_0}} \int_0^\pi e^{-\frac{R \cos(\vartheta)}{z_0}} R^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta .$$

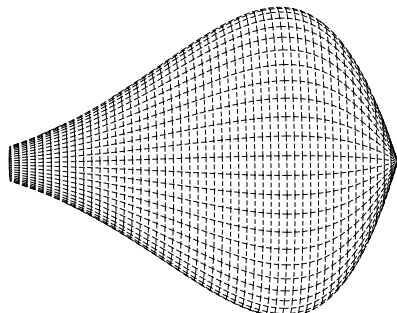
Használjuk a $x = \cos(\vartheta)$ helyettesítést, ekkor $dx = -\sin(\vartheta) d\vartheta$ és az integrál a következő alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} F_z &= -2\pi p_0 e^{-\frac{R}{z_0}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{Rx}{z_0}} R^2 x dx = -2\pi R^2 p_0 e^{-\frac{R}{z_0}} \left(-x \frac{z_0}{R} e^{-\frac{Rx}{z_0}} \Big|_{-1}^1 + \frac{z_0}{R} \int_{-1}^1 e^{-\frac{Rx}{z_0}} dx \right) \\ F_z &= 2\pi R^2 p_0 e^{-\frac{R}{z_0}} \left(\frac{z_0}{R} (e^{-\frac{R}{z_0}} + e^{\frac{R}{z_0}}) + \frac{z_0^2}{R^2} (e^{-\frac{R}{z_0}} - e^{\frac{R}{z_0}}) \right) = 2\pi R^2 p_0 \frac{z_0}{R} \left(1 + e^{-\frac{2R}{z_0}} + \frac{z_0}{R} (e^{-\frac{2R}{z_0}} - 1) \right) \end{aligned}$$

5. Feladat

20 pont

Az ábrán látható felületet a következőképpen parametrizálhatjuk:



$$\begin{aligned}x &= \sin(u)e^u \cos(v) \\y &= \sin(u)e^u \sin(v) \\z &= u\end{aligned}$$

ahol $\pi/6 \leq u \leq \pi$ és $0 \leq v \leq 2\pi$.

A Stokes tétel segítségével határozzuk meg a $\int \mathbf{e}_z d\mathbf{A}$ integrált a megadott felületre, ahol $\mathbf{e}_z$ a z irányú egységvektor! Felhasználhatjuk, hogy $\text{rot}(x\mathbf{e}_y) = \mathbf{e}_z$.

Megoldás:

A Stokes tétel szerint

$$\int \text{rot} \mathbf{V} d\mathbf{A} = \oint \mathbf{V} d\mathbf{r}.$$

A mi esetünkben a felületi integrál helyett egy olyan zárt görbe mentén kell integrálni, amely körülöleli a felületet. Nyilvánvalóan a felület "nyakánál", amikor $u = \pi/6$, található egy ilyen kör alakú kontúr, amelynek a sugara $r = \sin(\pi/6)e^{\pi/6}$. A felületi integrál tehát a következő körintegrállal határozhatjuk meg:

$$\oint_r x\mathbf{e}_y d\mathbf{r}$$

Polár koordinátákban:

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -r \sin(v) \\ r \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} dv$$

és

$$\mathbf{e}_y d\mathbf{r} = r \cos(v)$$

Tehát az integrál

$$\oint_r x\mathbf{e}_y d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(v) dv = \pi r^2.$$

r értékét behelyettesítve:

$$\oint_r x\mathbf{e}_y d\mathbf{r} = \pi \frac{1}{4} e^{\pi/3}.$$

A Stokes tétel értelmében tetszőleges olyan felületet választhatunk, amelyet körbezár a görbe, amely mentén integrálunk. Ez az állítás megegyezik a fluxus megmaradásával. Integrálandó felületnek válasszuk az alakzat nyakánál lévő korongot. Ennek a felületnek a normál vektora $\mathbf{e}_z$, így a felületi integrál egyszerűen a korong $r^2\pi$ területével egyezik meg, rögtön szolgáltatva a helyes eredményt!