Megjegyzés! Mivel válogatott anyagrol van szó, ezért legtöbbször j-vel jelölik az imaginárius részt.
Másik megjegyzés, hogy most nem tudtam tisztességesen végignézni, hogy melyik példánál hová veszik a 2π-t. Mi a `http://www.phy.bme.hu/~vektor/2015tavasz/fourier.pdf` alapján dolgoztunk. Ha nem jó helyen van a 2π javítsátok ki, ha észreveszitek, de úgysem az a lényeg.

1. Számoljuk ki egy lépcsőből álló a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltját! (Itt pl. a végén hiányzik $1/(2\pi)$)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{\sqcap(x)\} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi s x}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi s x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin \pi s}{\pi s} \equiv \mathrm{sinc}(s) \end{aligned}$$

2. Most számoljuk ki a

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{2}$$

Fourier-transzformáltját!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\,(t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(\pi t)}\ \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}t = \pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\nu \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\nu\pi)t}\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \delta\left(\omega + \nu\pi\right)\ \mathrm{d}\nu = \pi \int_{-1}^{1} \frac{\delta\left(\nu - [-\omega/\pi]\right)}{\pi}\ \mathrm{d}\nu = \Theta\left(1 - \left|-\frac{\omega}{\pi}\right|\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\,(t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}t \ = \ \Theta\left(\pi - |\omega|\right)$$

Érdemes megmutatni az első azonosságot:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\nu(\pi t)} d\nu = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i\pi t} e^{i\nu(\pi t)}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i(\pi t)} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \tag{3}$$

A végén pedig fontos, hogy mivel az integrálás véges tartományra vonatkozik, ha a Dirac-delta argumentumának zérus helye beleesik, akkor 1, egyébként 0 az értéke.

3. Számoljuk ki a Gauss-függvény Fourier-transzformáltját!

Putting the Gaussian function in the Fourier transform equation, we get

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{e^{-\pi x^2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-j2\pi s x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+j2sx+j^2s^2)} e^{-\pi s^2}\, dx \\
&= e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+js)^2}\, dx \\
&= e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy \qquad (\text{letting } y = x + js)
\end{aligned}$$

We therefore need to evaluate the area under the Gaussian function. A neat trick, reportedly due to Euler, shows that this equals to unity without resorting to integration tables. Let

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy.$$

Because y is a dummy variable above, we could have used x instead. Thus,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy,
\end{aligned}$$

since there is no coupling between the two integrals. We can now consider (x, y) as the Cartesian coordinates, and convert the integral to polar coordinates. Therefore,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\, dr\, d\theta \\
&= (2\pi)\left[-\frac{1}{2\pi} e^{-\pi r^2}\right]_{r=0}^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Amiből látható, hogy

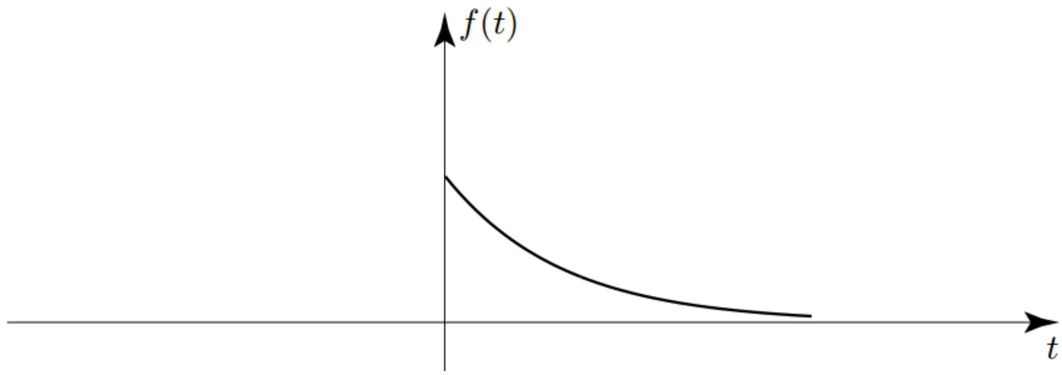
$$\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\pi}\right) \tag{4}$$

4. Egyoldalú exponenciális függvény Fourier-transzformáltja. Fontos, hogy $x < 0$ esetén a függvény zérus, ezért ott nem kell integrálni.

Find the Fourier Transform of the one-sided exponential function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}$$

where α is a positive constant.



Solution

Using (5) then by straightforward integration

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \qquad (\text{since } f(t) = 0 \text{ for } t < 0) \\ &= \int_0^\infty e^{-(\alpha + \mathrm{i}\omega t)} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{-(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}}{-(\alpha + \mathrm{i}\omega)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\alpha + \mathrm{i}\omega} \end{aligned}$$

since $e^{-\alpha t} \to 0$ as $t \to \infty$ for $\alpha > 0$.

5. A fentiek alapján határozzuk meg a

$$f(x) = \exp(|\alpha t|) \tag{5}$$

függvény Fourier-transzformáltját!

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t}}{(\alpha-\mathrm{i}\omega)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}}{-(\alpha+\mathrm{i}\omega)} \right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\alpha+\mathrm{i}\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

6. Az előadáson lesz, hogy a cosinus Fourier-transzformáltja a következő, de gyorsan le is lehet vezetni, ha tiltakoznak, hogy elmaradt:

$$\mathcal{F}[\cos(ax)] = \frac{1}{2}[\delta(\omega-a) + \delta(\omega+a)] \tag{6}$$

Ekkor a konvolúciós szabály (ami visszafelé is igaz!)

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt'\right] = 2\pi\mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[g(t)] \tag{7}$$

alaján (itt 2π-vel szorozza a mi Fourier-transzformáltunkat)

Find the Fourier transforms of the following signals.

a. $x_1(t) = e^{-|t|}\cos(2t)$

$$X_1(j\omega) = \boxed{\frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{1+(\omega+2)^2}}$$

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}$$

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\cos(2t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega-2) + \pi\delta(\omega+2)$$

Therefore, by the multiplication property,

$$e^{-|t|}\cos(2t) \leftrightarrow \frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{1+(\omega+2)^2}$$

7. A háromszögjel Fourier=transzformáltja:

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{ha } -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \tag{8}$$

a) hagyományos módszer:

$$\begin{aligned}
2\pi\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{0}(1+t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{-i\omega t}dt = \\
&= \left[\frac{1+i\omega(x+1)}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1+i\omega(x-1)}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_{0}^{1} = \\
&= \frac{1+i\omega}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{i\omega-1}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} = \\
&= \frac{e^{-i\omega}-2+e^{i\omega}}{\omega^2} = \frac{\sin(\omega/2)^2}{\omega^2} = 4\mathrm{sinc}^2(\omega/2)
\end{aligned} \tag{9}$$

b) módszer, konvolúció:

Mutassuk meg, hogy a négyszögjel $g(x)$(1. példa) konvolúciója önnmagával a háromszögjelet adja.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt' \tag{10}$$

Ekkor a konvolúciós szabály értelmében:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt'\right] = 2\pi\mathcal{F}[g(t)]\mathcal{F}[g(t)] \tag{11}$$

kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}[f(x)] = 2\pi\mathcal{F}[g(x)]^2 = \frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}^2(\omega/2) \tag{12}$$