

1. Dirac-delta

1. példa: Számoljuk ki a következő integrált:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \delta(\sqrt{x} - a) x^{-1/2} dx \quad (1)$$

Megoldás: Dolgozzunk integrál változó cserével: $y = \sqrt{x} - a$! Ekkor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dx = 2(y+a)dy, \quad \sqrt{x} = y+a \quad (2)$$

$$I_1 = \int_{-a}^{\infty} \delta(y) \frac{1}{y+a} 2(y+a)dy = 2 \quad (3)$$

2. példa: Számoljuk ki a következő integrált:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \delta[\sin(1/x)] \cos(1/x) dx \quad (4)$$

Megoldás: Használjuk az előadáson elhangzott képletet! Ha $g(x)$ zérushelyei x_i , akkor

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (5)$$

Jelen esetben $g(x) = \sin(1/x)$. Ekkor:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos(1/x) \quad (6)$$

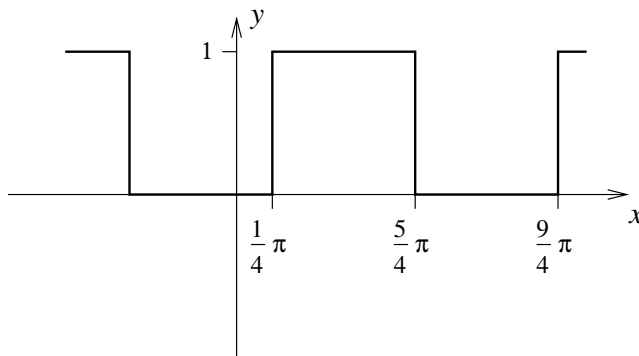
Zérushelyek: $1/x = k\pi$.

$$\delta(g(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - 1/k\pi)}{\cos(k\pi)(k\pi)^2} \quad (7)$$

Visszaírva:

$$I_2 = \sum_k \int_0^{\infty} \frac{\delta(x - 1/k\pi)}{\cos(k\pi)(k\pi)^2} \cos(1/x) dx = \sum_k \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)(k\pi)^2} = \sum_k \frac{1}{(k\pi)^2} = \frac{1}{6} \quad (8)$$

2. Eltolt négyszögjel Fourier-sora



Írjuk fel a fenti négyszögjel ($f(x)$) Fourier-sorát a definíció alapján!

Megoldás: Először is nyilvánvaló, hogy $a_0 = 1/2$. A Cosinus együtthatói:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \quad (9)$$

Innét

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ paros} \\ (-1)^{\lfloor n/4 \rfloor} \sqrt{2}/(n\pi) & \text{ha } n \text{ paratlan.} \end{cases} \quad (10)$$

Ahol a $\lfloor n/4 \rfloor$ a $n/4$ egész részét jelenti.

Hasonlóan a Sinus:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \quad (11)$$

Innét

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ paros} \\ (-1)^{\lfloor (n+2)/4 \rfloor} - \sqrt{2}/(n\pi) & \text{ha } n \text{ paratlan.} \end{cases} \quad (12)$$

Azaz a Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(2k-1)\pi} \{ (-1)^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \sin[(2k-1)x] - (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \cos[(2k-1)x] \} \quad (13)$$

2. megoldás: Használjuk az órai eredményt és azt csúsztassuk el. Az órai eredmény a $\pi/4$ -gyel balra csúsztatott lépcsőfüggvénnyel:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin[(2k-1)x] \quad (14)$$

Ekkor

$$f(x) = g(x - \pi/4) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin[(2k-1)(x - \pi/4)] \quad (15)$$

Kihasználva, hogy

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (16)$$

illetve

$$\begin{aligned} \sin[(2k-1)\pi/4] &= (-1)^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} / \sqrt{2} \\ \cos[(2k-1)\pi/4] &= (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Amiből az előző eredmény adódik.

3. Fűrészfog függvény Fourier-sora

Legyen a $-\pi \leq x \leq \pi$ intervallumon $f(x) = x$ és $f(x) = f(x + 2\pi)$ periodikus! Számoljuk ki a Fourier-sorát!

Megoldás:

$$\mathbf{3. (a)} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0 \quad [\text{because } x \cos nx \text{ is odd}]$$

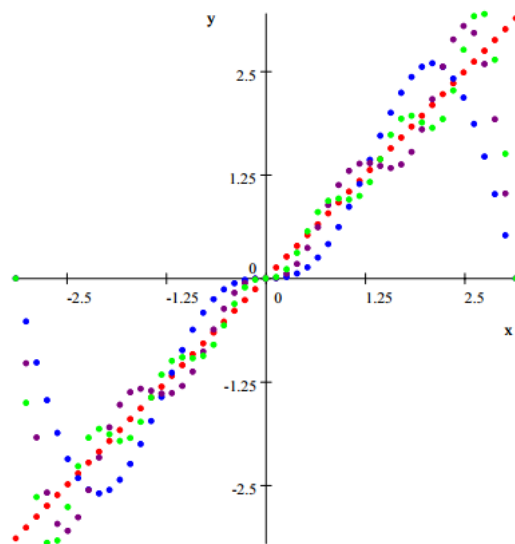
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \quad [\text{since } x \sin nx \text{ is odd}]$$

$$= -\frac{2}{n} \cos n\pi \quad [\text{using integration by parts}] = \begin{cases} -(2/n) & \text{if } n \text{ even} \\ (2/n) & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

$$\mathbf{(b)} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

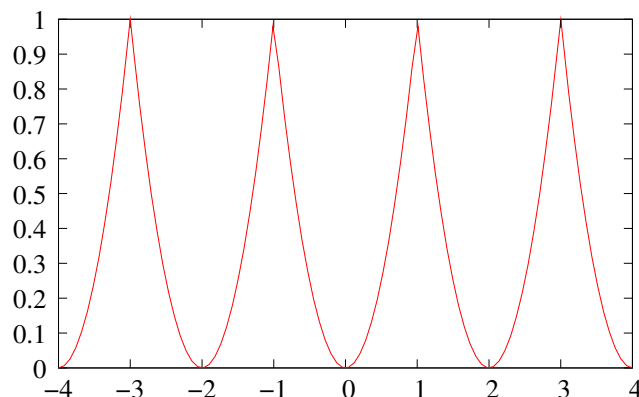
when $-\pi < x < \pi$.

(c)



4. Parabola Fourier-sora

4.1. Direkt megoldás



Számítsuk ki az ábrán látható függvény Fourier-sorát! $-1 \leq x \leq 1$ esetén $g(x) = x^2$.
Bizonyítsuk be a korábban használt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (18)$$

képletet!

Megoldás:

17. (a) We find the Fourier series for $f(x) = \{x^2 \text{ if } -1 \leq x \leq 1, \quad L = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \cos(n\pi x) dx = \frac{4}{(n\pi)^2} \cos n\pi = \begin{cases} \frac{4}{(n\pi)^2} & \text{if } n \text{ even} \\ -\frac{4}{(n\pi)^2} & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = 0 \quad \text{because } x^2 \sin(n\pi x) \text{ is odd.}$$

$$\text{So we have } x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) \text{ for } -1 \leq x \leq 1.$$

(b) We let $x = 1$ in the above to obtain

$$1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi) \quad \frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

4.2. Integrálással az előzőből

A határokat át kell sajnos váltani, de ettől eltekintve: A lényeg, hogy

$$\int_{-\pi}^x f(x') dx' = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^x \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx') dx' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{-\cos(nx')}{n} \right]_{-\pi}^x \quad (19)$$

Az alsó határ zérust ad, a felső $\cos(nx)/n$ -et. A $-$ előjel miatt pont visszkapjuk, ami akartunk!