1. Felületi integrál

Használjuk a

$$F = \iint_T dxdy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \tag{1}$$

kifejezést, az alábbi felületek meghatározásához!

3. Find the surface area of the following surfaces.

   (a) The part of the surface $z = 1 + 3x + 2y^2$ that lies above the triangle with vertices $(0,0), (0,1), (2,1)$.

   (b) The spiral ramp $\mathbf{r} = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$.

   Solution:

   (a) Let $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2y\}$. Then the surface area is

$$\begin{aligned} S &= \int\int_D \sqrt{1 + 9 + 16y^2} dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=2y} \sqrt{10 + 16y^2} dxdy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} 2y\sqrt{10+16y^2} dy = \frac{1}{24}(10+16y^2)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{24}(26^{3/2} - 10^{3/2}) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_v &= -u\sin v\mathbf{i} + u\cos v\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \sin v\mathbf{i} - \cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k} \\ |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= \sqrt{1+u^2} \end{aligned}$$

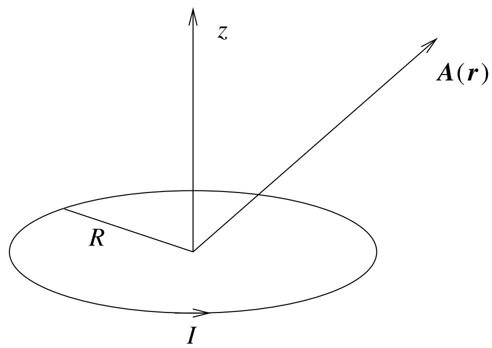
   Therefore the surface area is

$$\begin{aligned} S &= \int_{v=0}^{v=\pi} \int_{u=0}^{u=1} \sqrt{1+u^2} dudv = \pi \int_{u=0}^{u=1} \sqrt{1+u^2} du \\ &= \frac{\pi}{2}\left(u\sqrt{u^2+1} + \ln(u + \sqrt{u^2+1})\right) \Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})) \end{aligned}$$

2. Körvezető tere

Fontos! Még nem tanultak a vektorpotenciálról, a példát ennek ellenére érdemes a fizikai képpel motiválni, de a számolásra figyelni.

Számoljuk ki a körvezető vektorpotenciálját hengerkoordinátarendszerben!



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2}$$

A vesszős paraméterezi a körvezetőt. Henger koordinátarendszerben:

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} R\cos\phi' \\ R\sin\phi' \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -R\sin\phi' \\ R\cos\phi' \\ 0 \end{pmatrix} d\phi' \tag{3}$$

A keresett pont koordinátái:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \varrho\cos\phi \\ \varrho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\phi - \phi')} \tag{4}$$

Tehát

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\phi - \phi')}} \begin{pmatrix} -R\sin\phi' \\ R\cos\phi' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Bázisvektorok hengerkoordinátarendszerben:

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Az $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektor egyes komponensei:

$$A_z(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{e}_z = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} A_\varrho(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{e}_\varrho &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{-\sin(\phi - \phi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\phi - \phi')}} \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \left[\frac{1}{\varrho R} \sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\phi - \phi')} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$A_\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \frac{-\cos(\phi-\phi')}{\sqrt{z^2+\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\phi-\phi')}} \tag{9}$$

Ez egy elliptikus integrál, most nézzük meg $r^2 = \varrho^2 + z^2 \gg R^2$ esetet! Ha bevezetjuk: $u^2 = R^2 - 2\varrho R\cos(\phi - \phi')$, akkor Taylor második rendig:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+u^2}} \simeq \frac{1}{r} - \frac{u^2}{2r^3} + \ldots \tag{10}$$

Azaz

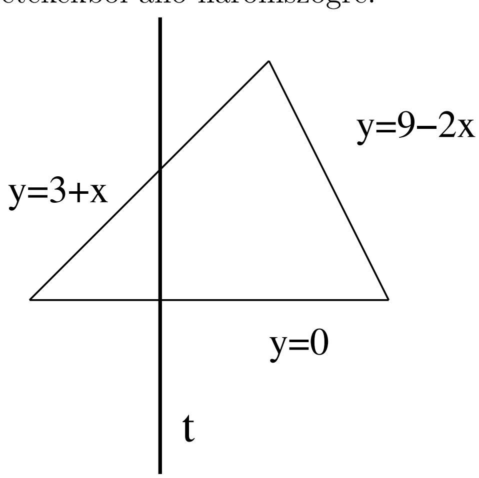
$$A_\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \cos(\phi-\phi')\left(\frac{1}{r} + \frac{2\varrho R\cos(\phi-\phi') - R^2}{2r^3}\right) \tag{11}$$

Minden ami a cosinus 1. hatványával integrálódik ($1/r$, R^2/r^3) zérus lesz, a maradék pedig:

$$A_\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{R^2\pi I\varrho}{r^3} \tag{12}$$

3. Tehetetlenségi nyomaték

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a t tengelyre az alábbi $\rho = 1\text{g/m}$ vonalsűrűségű vezetékekből álló háromszögre!



4. Hidrosztatikai nyomás

(Ezt részletesebben vigyétek végig!) Egy forgásparaboloid alakú edény h mályen süllyed a vízbe. Számoljuk ki a felhajtó erőt, ha a parabola egyenlete:

$$z = a(x^2 + y^2) \tag{13}$$

Paraméterezzük a paraboloidot a következőképpen:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{z/a}\cos\phi \\ y &= \sqrt{z/a}\sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{14}$$

A feluletelem:

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \sqrt{z/a}\cos\phi \\ \sqrt{z/a}\sin\phi \\ 1/(2a) \end{pmatrix} dz\ d\phi \tag{15}$$

A felhajtó erő

$$\mathbf{F} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi\ \rho g z \begin{pmatrix} \sqrt{z/a}\cos\phi \\ \sqrt{z/a}\sin\phi \\ 1/(2a) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Mutassuk meg, hogy az x és y koordináta kiesik! A z koordináta szerint az integrál:

$$F_z = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho g z}{2a} = \frac{1}{2}\pi\rho g \frac{h^2}{a} \tag{17}$$

5. Fluxus

Számoljuk ki a fenti parabolára a fluxust $F_1 = \mathbf{r}$, $F_2 = \mathbf{r}/r^2$, ill. $F_3 = \mathbf{r}/r^3$ esetén! A parabola alja az origóban van.

$$\Phi = \iint \mathbf{F} d\mathbf{A} \tag{18}$$

A felületelemet már kiszámítottuk. Kell még az $\mathbf{r}$ vektor:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{z/a}\cos\phi \\ \sqrt{z/a}\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \tag{19}$$

Ekkor

$$\mathbf{r} d\mathbf{A} = \frac{3}{2}\frac{z}{a} dz\ d\phi \tag{20}$$

A második erőtérhez kell még

$$r^2 = \frac{z}{a} + z^2 \tag{21}$$

Az integrálok tehát:

$$\Phi_1 = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\frac{z}{a} dz\ d\phi = \frac{3\pi h^2}{2a} \tag{22}$$

$$\Phi_2 = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\frac{z}{z + az^2} dz\ d\phi = \int_0^h dz 3\pi \frac{1}{1 + az} dz = \frac{3\pi}{a}\log(1 + ah) \tag{23}$$

$$\Phi_3 = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\frac{z}{(z/a + z^2)^{3/2}} dz\ d\phi = \left[\frac{3\pi a z}{\sqrt{z/a + z^2}} \right]_0^h = \frac{3\pi a h}{\sqrt{h/a + h^2}} \tag{24}$$