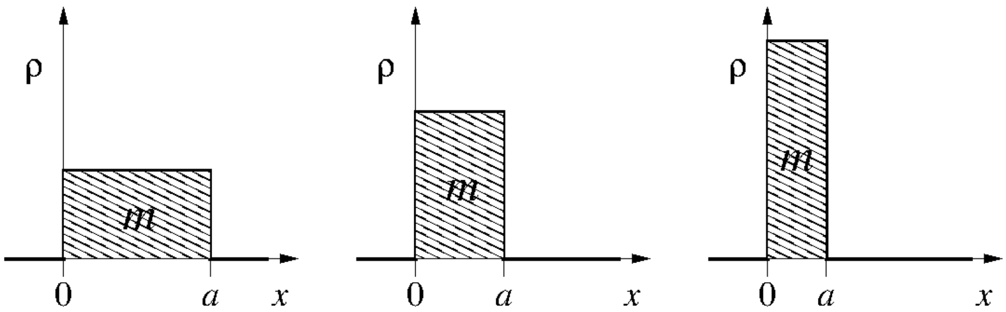
Részlet Török János, Orosz László, Unger Tamás, Elméleti Fizika 1 jegyzetéből

1. fejezet

Matematikai bevezető

1.1. Dirac-delta

Az ideális határesetek, mint például tömegpont, tökéletesen merev testek pillanatszerű ütközése, nagyon fontos szerepet játszanak a fizikában. Közös jellemzőjük a fenti példáknak, hogy valamilyen jellemző térbeli, vagy időbeli kiterjedésétől eltekintünk. Igen jó okunk van erre, hiszen a tömegközépponti tétel kimondja, hogy kiterjedt testek transzlációs mozgása olyan, mintha az össztömeg össze lenne sűrítve a tömegközéppontba és a külső erők erre hatnának. Tehát ha nem érdekel mindkét a test tömegközéppontjához viszonyított helyzete, a tömegponti leírás megfelelő. Ugyanígy az ütközések során minket legtöbbször csak a szóródás végeredménye érdekel, és a kölcsönhatás pontos módja lényegtelen.



1.1. ábra. Tömegpont készítése: A test kiterjedése egyre csökken, a sűrűsége nő, miközben tömege állandó marad.

Vizsgáljuk meg tehát először, hogy miképp lehet minél jobban közelíteni egy tömegpontot egy kiterjedt testtel! Dolgozzunk 1 dimenzióban és legyen a test homogén, kiterjedése $[0,a]$ (ld. 1.1 ábra). A test tömege a sűrűség integráljával számítható:

$$m=\int_0^a \rho(x)dx=a\rho \tag{1.1}$$

Ha tehát most a tömeget rögzítjük, miközben a test a kiterjedését csökkentjük, annak sűrűsége megnő: $\rho = m/a$. Jelöljük $D_a(x)$-szel azt a függvényt, ami egy adott a-ra teljesíti, hogy

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} D_a(x)dx \tag{1.2}$$

és emellett $D_a(x) = 0$, ha $x<0$, illetve $x>a$. Minket a $a \to 0$ határeset érdekel, ilyen függvény azonban nincs, mivel egy pontban lenne véges a területe. Igazából a $\delta(x) = \lim_{a\to 0} D_a(x)$ „függvényből” minket csak a következő tulajdonság érdekel:

$$\int_x^y \delta(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ha az } [x,y] \text{ tartományban nincs benn a 0} \\ 1, \text{ha x<0<y} \end{cases} \tag{1.3}$$

Ekkor az $m\delta(x)$ sűrűséget integrálva megkapnánk a tömeget.

Tehát, ha integrál jel mögött szerepel $\delta(x)$ akkor van értelme és akkor úgy lehet rá tekinteni, mint egy integrál–utasításra. Dimenziója:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{\text{m}} \tag{1.4}$$

Vizsgáljuk meg most a másik említett problémát, a tökéletesen merev testek ütközését! Ütközzön egy dimenzióban tökéletesen rugalmasan két m tömegű test! Az 1-es test kezdeti sebessége v és az ütközés után 0ra csökken. A 2-es testnél pont fordítva, 0-ról v-re nő a sebesség az ütközés során. Írjuk fel a 2-es test impulzus változását:

$$\Delta p = m\Delta v_2 = mv = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \tag{1.5}$$

Ahogy egyre keményebb anyagú testeket választunk úgy lesz a kölcsönhatás ideje egyre rövidebb, miközben az erőhatás egyre erősebb. A pillanatszerű ütközés határesetben a tömegponthoz hasonlóan itt sem létezik erőfüggvény, de az előbbi integrál-utasításnak itt is van értelme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta p\delta(t)dt \tag{1.6}$$

Az itt definiált $\delta(t)$ dimenziója:

$$[\delta(t)] = \frac{1}{\text{s}} \tag{1.7}$$

Az előbbiekben definiált $\delta(x)$ *disztribució*t *Dirac-deltá*nak nevezzük.

Megjegyzés: A disztribúció-elmélet megalkotója L. Schwartz volt. Aki elolvasván P.A.M. Dirac The Principles of Quantum Mechanics (1930) könyvét elégedetlen volt annak matematikai korrektségével. Ebben a könyvben használta Dirac a fenti $\delta(t)$ függvényt először. Ezért ragadt rá a későbbiekben Dirac-delta név. Maga Dirac is óvatosan fogalmazott:

„Thus $\delta\,(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise."

Jóllehet a kvantummechanikai számításokban minden jól kijött, a függvényként való kezelése zavarta a matematikai képességeiről méltán híres Neumannt. Az ő ez irányú matematikai vizsgálódásai indították el a disztribúció elméletnek nevezett matematikai területet.

Foglaljuk össze a Dirac-delta tulajdonságait:

1. A Dirac-deltát tehát a következőképpen hat:
$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t-t_0)dt = y(t_0) \tag{1.8}$$
2. A Dirac-deltát bármely véges tartójú függvényből elő lehet állítani határesetként, ha a tartót úgy nyomjuk 0 méretűvé, hogy közben az integrált 1-nek tartjuk.
3. Mértékegysége: $[\delta(t)] = 1/s$, illetve $[\delta(x)] = 1/m$
4. Szimmetrikus: $\delta(t) = \delta(-t)$
5. Átskálázás: $\delta(\lambda t) = \frac{1}{\lambda}\delta(t)$, ha $\lambda > 0$
6. A lépcsőfüggvény deriváltja: $\delta(t) = d\theta/dt$

1.2. Fourier-transzformáció

1.2.1. Periodikus függvények Fourier-analízise

Bevezetésül ismételjük át azt, amit az eddigi tanulmányaink során a rezgések spektrális felbontásáról hallottunk. A legismertebb gyakorlati példa erre a különböző hangszerek által keltett hangok analízise. Azaz annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi a fizikai oka annak, hogy pl. ugyanaz a normál á hang minden hangszeren másképpen hallatszik, azaz különbséget tudunk tenni mondjuk a hegedű és az oboa hangja között.

Legyen $x(t)$ egy periodikus függvény T periódusidővel ($x(t+kT) = x(t)$, minden $k \in \mathbb{Z}$-re), amely abszolút integrálható, azaz
$$\int_0^T |x(t)|dt < \infty. \tag{1.9}$$

Ekkor mivel a szinusz és koszinusz függvények ortogonális bázist alkotnak L_2 felett, felírható x Fourier-sora:

$$x(t,T) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)] + \frac{b_0}{2}, \tag{1.10}$$

ahol $\omega = 2\pi/T$. Az a_k, b_k Fourier-együtthatók meghatározzák $x(t)$-t. Visszafelé a szinusz és koszinusz függvények ortogonáltságát kihasználva tudjuk meghatározni a Fourier-együtthatókat az $x(t)$ függvényből. Emlékeztetőül az ortogonáltság következménye:

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(n\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{kn} \tag{1.11}$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{kn} \tag{1.12}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(n\omega t)dt = 0, \tag{1.13}$$

ahol δ_{kn} a Kronecker-delta. Mindezek felhasználásával a Fourier-együtthatók a következőképpen számolhatók ki:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x\,(t)\sin\,(k\omega t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x\,(t)\cos\,(k\omega t)\,dt, \tag{1.14}$$

ahol $k \in \mathbb{N}$. Láthatóan $a_0 = 0$, illetve

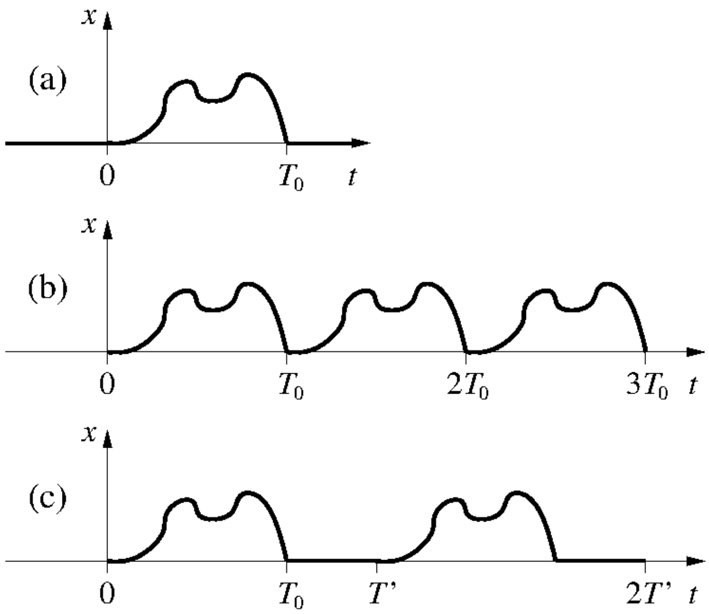
$$b_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{1.15}$$

Ezért, ahogy már láttuk:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)] \tag{1.16}$$

1.2.2. Nem-periodikus függvények Fourier-analízise

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy vajon egy nem periodikus $x\,(t)$ függvény szintén felbontható-e valamiféle összetevőkre. Azaz létezik-e nem periodikus függvények spektrális felbontása. A válasz igen!



1.2. ábra. (a) Véges tartójú $x(t)$ függvény. (b) T_0 periódusú periodikus függvény $x(t)$-ből. (c) T' periódusú periodikus függvény $x(t)$-ből.

Legyen $x(t)$ egy véges tartójú ($t \in [0, T_0]$) függvény (1.2 (a) ábra). Ha a függvény tartóját megismételjük egymás mellett (1.2 (b) ábra), akkor T_0 periódus idejű periodikus függvényt kapunk. Ennek Fourier-sora:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t) \right], \tag{1.17}$$

ahol $\omega = 2\pi / T_0$.

Megtehetjük, hogy a véges tartókat nem pontosan egymás mellé illesztjük, mint a 1.2 (c) ábrán, ekkor az $x_{T'}(t)$ periodikus függvényt kapjuk T' periódusidővel. Minél nagyobbra választjuk T'-t, annál inkább hasonlít a periodikus függvényünk az eredetire. Természetesen $x_{T'}(t)$ Fourier-sora is felírható, de most az alapharmonikus $\omega' = 2\pi / T'$:

$$x_{T'}(t) = \frac{b_{0,T'}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k,T'} \sin(k\omega' t) + b_{k,T'} \cos(k\omega' t) \right]. \tag{1.18}$$

Az eredeti $x(t)$ függvény az alábbi határátmenettel áll elő:

$$x(t) = \lim_{T' \to \infty} x_{T'}(t) \tag{1.19}$$

Ennek két következménye lesz: Egyrészt folytonos lesz a spektrum, hiszen az alapharmonikus $\Delta\omega' = \omega' = 2\pi / T' \to 0$, másrészt az $a_{k,T'}, b_{k,T'}$ együtthatók is tartanak nullához:

$$x(t) = \lim_{T'\to\infty} x_{T'}(t) = \lim_{T'\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{k,T'} \sin(k\omega' t) + B_{k,T'} \cos(k\omega' t)\right] \Delta\omega'. \tag{1.20}$$

Itt elhagytuk a nullához tartó konstans $b_{0,T'}$ tagot. Ez lényegében az integrál diszkrét definíciója, azaz:

$$x(t) = \int_0^\infty [A(\omega)\sin(\omega t) + B(\omega)\cos(\omega t)] d\omega \tag{1.21}$$

Ezt nevezzük Fourier-integrálnak. Az együtthatók meghatározása:

$$A(\omega) = \frac{T'}{2\pi} a_{k,T'} = \frac{T'}{2\pi}\frac{2}{T'}\int_0^{T'} x_{T'}(t)\sin(k\omega' t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{T_0} x(t)\sin(\omega t)dt, \tag{1.22}$$

ahol $\omega = k\omega'$. Összegezve:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt \tag{1.23}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt \tag{1.24}$$

Az integrálási tartomány kiterjesztésénél kihasználtuk $x(t)$ véges tartósságát.

1.3. Komplex Fourier-analízis

A folytonos Fourier-analízist érdemes továbbvinni komplex számok esetére is. Ismert, hogy

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad \text{és} \quad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}. \tag{1.25}$$

Ekkor az $x(t)$ Fourier-transzormáltja a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\infty e^{i\omega t}\left[\frac{A(\omega)}{2i} + \frac{B(\omega)}{2}\right] + e^{-i\omega t}\left[-\frac{A(\omega)}{2i} + \frac{B(\omega)}{2}\right] d\omega = \\ &= \int_0^\infty e^{i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2}[B(\omega) - iA(\omega)]}_{\tilde{X}(\omega)} + e^{-i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2}[B(\omega) + iA(\omega)]}_{\tilde{X}^*(\omega)} d\omega \end{aligned} \tag{1.26}$$

Bevezettük a $\tilde{X}(\omega) = [B(\omega) - iA(\omega)]/2$ komplex együtthatót. A $\tilde{X}^*(\omega)$ ennek komplex konjugáltja. $x(t)$ Fourier-transzformáltja most így néz ki:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\infty \left[\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}\right] d\omega + \int_0^\infty \left[\tilde{X}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right] d\omega = \\ &= \int_0^\infty \left[\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}\right] d\omega + \int_{-\infty}^0 \left[\tilde{X}^*(-\omega')e^{+i\omega' t}\right] d\omega' \end{aligned} \tag{1.27}$$

A második lépésben végrehajtottunk egy változó cserét. A szinusz és koszinusz függvények páratlan illetve párossága miatt igazak a következő összefüggések:

$$A(-\omega) = -A(\omega), \quad \text{és} \quad B(-\omega) = +B(\omega) \tag{1.28}$$

Ebből következik hogy

$$\tilde{X}^*(-\omega) = \frac{B(-\omega) + iA(-\omega)}{2} = \frac{B(\omega) - iA(\omega)}{2} = \tilde{X}(\omega) \tag{1.29}$$

Azaz a komplex Fourier-transzformáció az alábbi egyszerű alakot veszi fel:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{1.30}$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1.31}$$

Az $x(t)$ valós időfüggvény Fourier-transzformáltja a $\tilde{X}(\omega)$ komplex frekvenciafüggvény. Gyakran mondjuk azt is, hogy: Az $x(t)$ függvény Fourier spektruma az $\tilde{X}(\omega)$. A Fourier-transzformációra a következői szimbólumot használjuk:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \tilde{X}(\omega) \tag{1.32}$$

Amint már régebben utaltunk rá, a Fourier-transzformáció mindig létezik, ha a transzformálandó függvény abszolút, vagy négyzetesen integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \quad \text{vagy} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt < \infty \tag{1.33}$$

1.4. Fontos azonosságok Fourier-transzformációhoz

Írjuk fel egy függvény Fourier-transzformáltjának inverz Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} x(t') e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t - t') dt' \end{aligned} \tag{1.34}$$

A fenti azonosság alapján felírható a Dirac-delta egy kicsit szokatlan előállítása:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\mathcal{F}[\delta(t)]} e^{i\omega t} d\omega, \tag{1.35}$$

ahonnan leolvasható a Dirac-delta Fourier-transzformáltja:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \tag{1.36}$$

Hajtsuk végre a $t \to -\omega$ és $\omega \to t$ változó cseréket az (1.35) egyenletben! Ekkor a konstans Fourier-transzformáltját kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta(\omega) = \delta(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} dt \\ \mathcal{F}[1] = \delta(\omega) & \end{aligned} \tag{1.37}$$

További néhány fontos tételt is felírhatunk, amelyekben bonyolult műveletek egyszerű szorzássá válnak Fourier térben.

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = i\omega \mathcal{F}[f(t)] \tag{1.38}$$

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)] \tag{1.39}$$

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt'\right] = 2\pi \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[g(t)] \tag{1.40}$$

Az első kettő állítás triviálisan bizonyítható a definícióból, az utolsó a *konvolúció* Fourier-transzformáltja a lineáris rendszerek analízisénél kap fontos szerepet. Bizonyításához induljunk ki az $f(t')$ és a $g(t - t')$ Fourier-transzformáltjából:

$$f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \tag{1.41}$$

$$g(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \tag{1.42}$$

Most írjuk fel a konvolúciót:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t'} d\omega\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega'\right) dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \tilde{G}(\omega') e^{i\omega t'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t'} dt'\right)}_{2\pi\delta(\omega-\omega')} d\omega d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \tilde{F}(\omega) \tilde{G}(\omega') e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{1.43}$$

A fenti kifejezésből leolvasható, hogy a konvolúció Fourier-transzformáltja valóban az (1.40) egyenletnek megfelelő.