1. Egyszerű differenciálegyenlet többféle módszerrel

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet a választók szétválasztásának módszerével!

$$\dot{v} + \alpha v = 0 \tag{1}$$

Megoldás:

$$\frac{dv}{v} = -\alpha dt, \qquad \log v = -\alpha t + C, \qquad v(t) = Ce^{-\alpha t} \tag{2}$$

2. Oldjuk meg (1) egyenletet Foirier-transzformációval!

Megoldás:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad \frac{dv}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \tilde{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{3}$$

Behelyettesítve:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) e^{i\omega t} (i\omega + \alpha) d\omega = 0 \tag{4}$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $\tilde{V}(\omega)$ csak ott nem nulla, ahol $i\omega + \alpha = 0$, azaz

$$\tilde{V}(\omega) = \delta(\omega - i\alpha) \tag{5}$$

Ezt könnyű visszatranszformálni:

$$v(t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\alpha) e^{i\omega t} d\omega = C \exp(i \cdot i\alpha\ t) = Ce^{-\alpha t} \tag{6}$$

3. Oldjuk meg az alábbi inhomogén egyenletet!

$$\dot{v} + \alpha v = \beta t \tag{7}$$

Keressük a partikuláris megoldást $v_p(t) = At + B$ alakban! Ekkor

$$A + \alpha A t + \alpha B = \beta t, \qquad t(\alpha A - \beta) + (A + \alpha B) = 0 \tag{8}$$

A fenti egyelnet minden t-re igaz, azaz

$$\begin{aligned} \alpha A - \beta &= 0 \\ A + \alpha B &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

ahonnét

$$A = \beta/\alpha, \qquad B = -\beta/\alpha^2 \tag{10}$$

Azaz a megoldás:

$$v(t) = Ce^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}t - \frac{\beta}{\alpha^2} \tag{11}$$

Nézzük meg a dimenziót is! Ha $[v] = \mathrm{m/s}$, akkor $[\alpha] = 1/\mathrm{s}$, illetve $[\beta] = \mathrm{m/s}^3$. Az eredmény tehát dimenziósan helyes.

Érdemes visszahelyettesíteni a megoldást az egyenletbe!

4. Oldjuk meg az alábbi inhomogén egyenletet!

$$\dot{v} + \alpha v = U\sin(\lambda t) \tag{12}$$

Keressük a partikuláris megoldást $v_p(t) = A\sin(\lambda t) + B\cos(\lambda t)$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} A\lambda\cos(\lambda t) - B\lambda\sin(\lambda t) + \alpha A\sin(\lambda t) + \alpha B\cos(\lambda t) &= U\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t)(\alpha A - \lambda B - U) + \cos(\lambda t)(\lambda A + \alpha B) &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Az egyenletrendszer A, B-re:

$$\begin{aligned} \alpha A - \lambda B &= U \\ \lambda A + \alpha B &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Ebből

$$A = \frac{U}{\alpha + \lambda^2/\alpha}, \qquad B = \frac{-U}{\lambda + \alpha^2/\lambda} \tag{15}$$

A megoldás tehát:

$$v(t) = Ce^{-\alpha t} + \frac{U}{\alpha + \lambda^2/\alpha}\sin(\lambda t) - \frac{U}{\lambda + \alpha^2/\lambda}\cos(\lambda t) \tag{16}$$

Mivel $[\lambda] = 1/\mathrm{s}$ és $[U] = \mathrm{m/s}^2$, exért dimenziósan is rendben van az egyenlet.

Érdemes visszahelyettesíteni a megoldást az egyenletbe!

5. Számoljuk ki a (1) egyenlet Green-függvényét!

   a) Az órán bemutatott módszerrel. Még egyszer erre az esetre is vezessük le, hogy ez az homogén egyenlet megoldása Dirac-delta kezdőfeltétellel. Az egyenlet a Green-függvényre (U egységnyi sebesség)

$$\dot{v} + \alpha v = U\delta(t) \tag{17}$$

Integrálva az egyenletet kapjuk, hogy:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\dot{G}+\alpha G)dt = U$$

$$[v]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\alpha G dt}_{=\mathcal{O}(\varepsilon)} = U$$

$$v(t=\varepsilon) - v(t=-\varepsilon) = U \tag{18}$$

Azaz a kezdő időpillanatban $v(0^+)$ értéke egységnyi. !nnéttől viszont az egyenlet homogén, azaz a Green-függvény:

$$G(t) = \Theta(t)Ue^{-\alpha t} \tag{19}$$

b) Fourier-transzformációval:

$$(i\omega+\alpha)\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} \tag{20}$$

Ahonnét

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{2\pi(i\omega+\alpha)} \tag{21}$$

Ezt meg ismerjük, hiszen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-2\pi(\alpha+i\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi(i\omega+\alpha)} \tag{22}$$

Azaz a megoldás mint (19).

6. Határozzuk meg a Green-függvény Fourier-transzformáltjából, hogy melyik frekvenciakomponenst csillapítja legkevésbé a rendszer.

$$|\tilde{G}| = \left|\frac{1}{2\pi(i\omega+\alpha)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha+i\omega)(\alpha-i\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \tag{23}$$

Azaz az átviteli függvény abszolút értékének legnagyobb értéke $\omega = 0$-nál van, azaz azt a nyilvánvaló eredményt kaptuk, hogy sebességfüggő csillapítás esetén a kis frekvenciás módusok maradnak utoljára.

7. Számoljuk ki Green-függvény segítségével a (7) egyenlet partikuláris megoldását!

A megoldást konvolúció segítségével kapjuk meg:

$$v_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t-\tau)d\tau, \tag{24}$$

ahol $f(t) = \beta t$, illetve Green függvényben található lépcsőfüggvény miatt csak 0-tól fogunk integrálni. Tehát:

$$\begin{aligned} v_p(t) &= \int_0^\infty \beta e^{-\alpha\tau}(t-\tau)d\tau = \\ &= \beta t \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}d\tau - \beta \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\tau d\tau = \\ &= \beta t \left[\frac{-1}{\alpha^2}e^{-\alpha\tau}\right]_0^\infty - \beta\left[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha\tau}(\alpha\tau+1)\right]_0^\infty = \\ &= \frac{\beta}{\alpha}t - \frac{\beta}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{25}$$

Azaz ugyanaz, mint az előző esetben.

8. Határozzuk meg a partikuláris megoldását a (12) egyenletnek Green-függvény segítségével Fourier-transzformáció használatával!

   A Green-függvényt már kiszámítottuk:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi(i\omega+\alpha)} \tag{26}$$

   A $\sin(\lambda t)$ Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{S}(\omega) = \mathcal{F}[\sin(\lambda t)] = \frac{-i}{2}[\delta(\lambda-\omega) - \delta(\lambda+\omega)] \tag{27}$$

   A konvolúció a Fourier-térben egyszerű szorzás:

$$\tilde{V}(\omega) = 2\pi\tilde{S}(\omega)G(\omega) = \frac{1}{(i\omega+\alpha)}\frac{-i}{2}[\delta(\lambda-\omega)-\delta(\lambda+\omega)] \tag{28}$$

   Végezzük el a vissza Fourier-transzformációt:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(i\omega+\alpha)}\frac{-i}{2}[\delta(\lambda-\omega)-\delta(\lambda+\omega)]e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2(i\alpha-\lambda)}e^{i\lambda t} + \frac{1}{2(i\alpha+\lambda)}e^{-i\lambda t} = \\ &= \frac{-i\alpha-\lambda}{2(\alpha^2+\lambda^2)}e^{i\lambda t} + \frac{i\alpha-\lambda}{2(\lambda^2+\alpha^2)}e^{-i\lambda t} = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\sin(\lambda t) - \frac{\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}\cos(\lambda t) \end{aligned} \tag{29}$$

   Azaz ugyanaz, mint előbb.