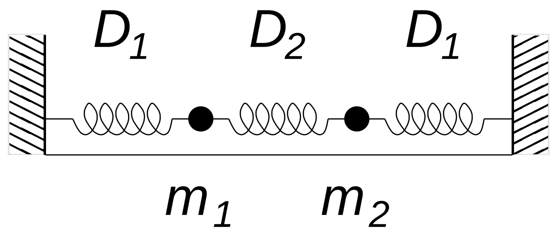
1. Feladat

Határozzuk meg az ábrán látható rendszer jellemző frekvenciáit, ha egyensúlyi helyzetben a rugók nyújtatlanok. A testek csak vízszintesen, egy egyenes mentén mozoghatnak súrlódás nélkül!



Megoldás

A diff. egyenlet:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Új változókat bevezetve: $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$ az egyenlet a következő alakra hozható

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{x}} \, ,$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix}$$

Ez az alak már a szokásos.

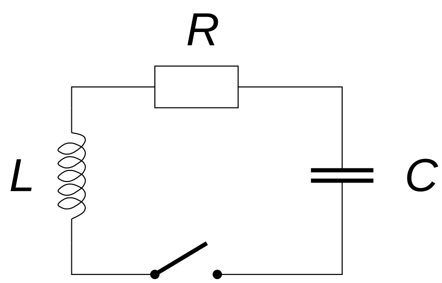
2. Feladat

A csillapított harmonikus oszcillátor mozgás egyenlete a következő:

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - Dx \; .$$

Írjuk fel a kezdőfeltételeket, ha a rugót a kezdő pillanatban A hosszúsággal megnyújtjuk és elengedjük! Hogyan változik az időben a rendszer energiája?

3. Feladat



Az ábrán látható áramkörben az áram változását a kapcsoló zárása után a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$-L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{1}{C}\int I dt \; .$$

Írjuk át az egyenletet differenciál egyenletté! Határozzuk meg az egyenlet tipusát! Adjuk meg az áram időbeli változását, ha a kapcsoló zárása előtt a kondenzátor Q töltést tárolt!

4. Feladat

Tekintsük a következő differenciál egyenletet:

$$y''' = by \; .$$

Írjuk át elsőrendű differenciál egyenlet rendszerré! Oldjuk meg a feladatot!

$$y_1 = y \; , \;\; y_2 = y' \; , \;\; y_3 = y''$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus polinom: $-\lambda^3 + b = 0$.

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{b} \; , \;\; \lambda_2 = \sqrt[3]{b}e^{i\frac{2\pi}{3}} \; , \;\; \lambda_3 = \sqrt[3]{b}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$