1. Felhajtó erő a forgásparaboloidon Gauss–Osztrogradszkij-tétellel

A forgásparaboloid egyenlete: $z = a(x^2 + y^2)$. A nyomás

$$p = -\rho g(h - h_0) \tag{1}$$

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel:

$$\oiint_F \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{F} = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})dV \tag{2}$$

Legyen $p(\mathbf{r})$ egy skalármező és $\mathbf{c}$ egy konstans vektor. Ekkor a Gauss–Osztrogradszkij-tétel a következőképpen alakul:

$$\oiint_F \mathbf{c}p(\mathbf{r})d\mathbf{F} = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{c}p(\mathbf{r})dV = \iiint_V (p\mathrm{div}\mathbf{c}+\mathbf{c}\mathrm{grad}p)dV = \mathbf{c}\iiint_V \mathrm{grad}p\, dV \tag{3}$$

Mivel $\mathbf{c}$ konstans. Azaz:

$$\oiint_F p(\mathbf{r})d\mathbf{F} = \iiint_V \mathrm{grad}p\ dV \tag{4}$$

Mivel $\mathrm{grad}p = -\rho g$, a testre a felhajtó erő kihasználva a ZH-ban kiszámolt térfogatot:

$$P = \iiint_V \rho g\ dV = \rho g \frac{h^2\pi}{2a} \tag{5}$$

2. Az előző feladat barometrikus nyomással

A barometrikus nyomás:

$$p = p_0 e^{-z/z_0} \tag{6}$$

Az előzőek alapján a fenti gradiense kell:

$$\mathrm{grad}p = -\frac{p_0}{z_0}e^{-z/z_0} \tag{7}$$

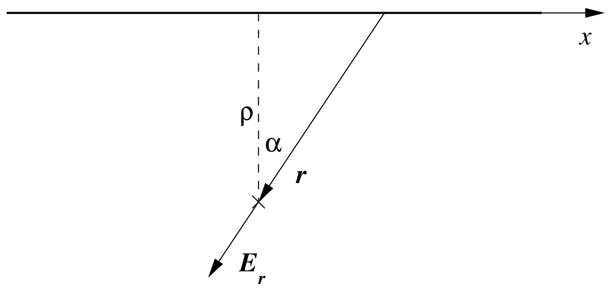
A kiszámolandó tehát:

$$P = \iiint_V \frac{p_0}{z_0}e^{-z/z_0}dV \tag{8}$$

A térfogatot most úgy számoljuk, hogy z szerint felintegráljuk a $A = z\pi/a$ kör alakú felületeket. (Lehet parciális integrálást is gyakorolni!)

$$\begin{aligned} P =& \frac{p_0\pi}{z_0 a}\int_0^h z e^{-z/z_0}\ dz = \frac{p_0\pi}{z_0 a}\left[-z_0(z+z_0)e^{-z/z_0}\right]_0^h \\ =& \frac{p_0\pi}{z_0 a} z_0\left[z_0 - e^{-h/z_0}(h+z_0)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

3. Egyenletesen töltött vezető tere



Egy végtelen vezeték λ egyenletes vonaltöltéssűrűséggel van töltve. Mekkore a tere?

Hagyományos módszer, integráljunk x szerint a teljes tengelyen, kihasználva, hogy csak az x-re merőleges komponens kell a szimmetria miatt. A távolság $r = \sqrt{x^2\rho^2}$. $\mathbf{E}$ elektromos mezőnek csak hengerkoordináta rendszerben sugár irányú komponense van:

$$\begin{aligned} E_r =& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\cos\alpha}{r^2}dx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\rho}{(x^2+\rho^2)^{3/2}}dx = \\ =& \frac{\lambda\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{\rho^2\sqrt{x^2+\rho^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \tag{10}$$

Az utóbbi:

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x}{\rho^2\sqrt{x^2+\rho^2}} = \frac{1}{\rho^2} \tag{11}$$

Tehát

$$\mathbf{E}(r,\phi,z) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}, 0, 0\right) \tag{12}$$

Ugyanez Gauss–Osztrogradszkij-tétellel:

Vegyünmk egy ρ sugarú H magasságú hengert, melynek tengelye a vezető. Ekkor a Gauss törvény:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\text{henger}}\varrho(\mathbf{r})dV = \oiint_{\text{henger}}\mathbf{E}d\mathbf{F} \tag{13}$$

Mivel $\mathbf{E}$ sugár irányú, ezért csak a palást számít, ahol meg szimmetria okokból mindenhol ugyanakkora. A töltéssűrűséget meg csak a vezetéken kell veégigintegrálni:

$$\frac{H\lambda}{\varepsilon_0} = E_r H\rho 2\pi \tag{14}$$

Ahonnét

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} \tag{15}$$

4. Töltött szigetelő gömb

Határozzuk meg egy egyenletesen $\rho(\mathbf{r})$ töltött R sugarú gömb terét!

Szimmetriamegfontolások miatt:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = (E_r(r), 0, 0) \tag{16}$$

Gauss-tétellel:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{r'<r} \rho dV = \oiint_{\text{gomb}} E_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi = E_r \; 4\pi r^2 \tag{17}$$

Amiből:

$$E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r & \text{ha } r < R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} & \text{ha } r \geq R \end{cases} \tag{18}$$

5. Fluxus körlapon

Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$ vektormező fluxusa, egy az origótól h távolságra lévő, $r = \sqrt{h}$ sugarú körlapra

$$\Phi_\circ = 2a - \frac{3\pi a h}{\sqrt{h/a + h^2}}! \tag{19}$$

A fenti vektormező divergenziamentes:

$$\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3) = \sum_i \partial_i r_i / r^3 = \sum_i \left(\frac{\delta_{ii}}{r^3} - \frac{3 r_i r_i}{r^5} \right) = 0 \tag{20}$$

A Gauss–Osztrogradszkij-tételből következik, hogy fluxusa bármely zárt görbére zérus. Legyen ez a görbe egy $z = a(x^2 + y^2)$ egyenletű paraboloid és a fenti körlap. A múlt órai eredményt használva kapjuk az eredményt. Felhívnám a figyelmet, hogy a múlt órai eredményből lemaradt a $-2a$, amennyiben a töltés ε-nyit kívül van a paraboloidon. Ha bent lenne, akkor $+2a$.

6. Gömb tehetetlenségi nyomatéka

Számoljuk ki az egyenetes ρ sűrűségű gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre!

A kiszámítandó integrál tehát:

$$\theta_\phi = \iiint_\circ \rho z^2 dV \tag{21}$$

Használjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt! Ehhez kell egy olyan tér, amelynek divergenciája z^2.

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \mathrm{div}\frac{1}{3}z^3\mathbf{k} = \sum_i \partial_i \frac{1}{3}z^3 k_i = z^2 \tag{22}$$

A többi angolul mellékelve:

SOLUTION Let S be the unit sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. By the divergence theorem:

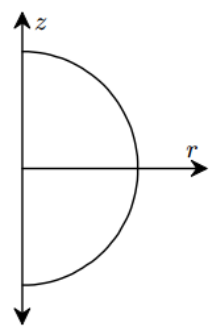
$$\iiint_{\mathcal{R}} z^2\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$$

where $\mathbf{F}$ is any vector field whose divergence is z^2. One possible choice is $\mathbf{F} = \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}$:

$$\iiint_{\mathcal{R}} z^2\,dV = \iint_S \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}\cdot d\mathbf{A}$$

All that remains is to compute the surface integral $\iint_S \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}\cdot d\mathbf{A}$.

We have parameterized the sphere many times by now:



$$\begin{array}{lcl} t = \theta & & x = \cos u \cos t \\ r = \cos u & \text{so} & y = \cos u \sin t \\ z = \sin u & & z = \sin u \end{array}$$

$$0 \le t \le 2\pi \quad \text{and} \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$

This gives:

$$d\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt\,du = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos u \sin t & \cos u \cos t & 0 \\ -\sin u \cos t & -\sin u \sin t & \cos u \end{vmatrix} dt\,du$$

$$= \left(\cos^2 u \cos t,\ \cos^2 u \sin t,\ \cos u \sin u\right) dt\,du$$

so:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}\cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin u)^3 \cos u \sin u\,du\,dt \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 u \cos u\,du \\ &= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{5}\sin^5 u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

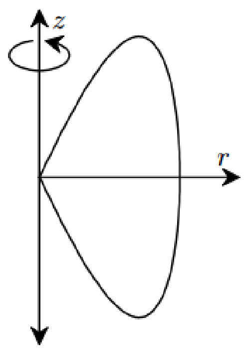
■

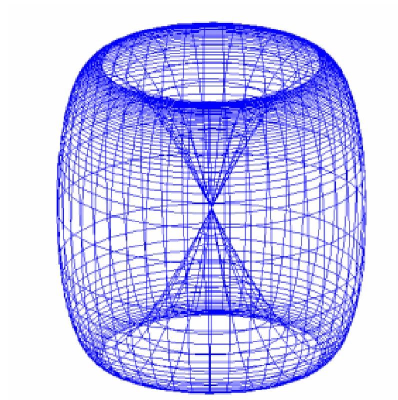
7. Térfogatszámolás Gauss–Osztrogradszkij-tétellel

EXAMPLE 6 Let S be the surface obtained by rotating the curve

$$r = \cos u \qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$
$$z = \sin 2u$$

around the z-axis:





Use the divergence theorem to find the volume of the region inside of S.

SOLUTION We wish to evaluate the integral $\iiint_{\mathcal{R}} dV$, where $\mathcal{R}$ is the region inside of S. By the divergence theorem:

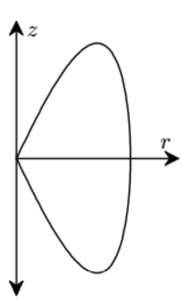
$$\iiint_{\mathcal{R}} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

where $\mathbf{F}$ is any vector field whose divergence is 1. Because of the cylindrical symmetry, $x\mathbf{i}$ and $y\mathbf{j}$ are poor choices for $\mathbf{F}$. We therefore let $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$:

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV = \iint_S z\mathbf{k} \cdot d\mathbf{A}$$

All that remains is to evaluate the surface integral $\iint_S z\mathbf{k} \cdot d\mathbf{A}$.

We were essentially given the parameterization of the surface:



$$\begin{aligned} t &= \theta & & & x &= \cos u \cos t \\ r &= \cos u & &\text{so} & y &= \cos u \sin t \\ z &= \sin 2u & & & z &= \sin 2u \end{aligned}$$

$$0 \le t \le 2\pi \quad \text{and} \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$

Thus:

$$d\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt\,du = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos u \sin t & \cos u \cos t & 0 \\ -\sin u \cos t & -\sin u \sin t & 2\cos 2u \end{vmatrix} dt\,du$$

$$= (2\cos u \cos 2u \cos t,\ 2\cos u \cos 2u \sin t,\ \cos u \sin u)\,dt\,du$$

so:

$$\iint_S z\,\mathbf{k}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2u)\cos u \sin u\,du\,dt$$

$$= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2u \cos u \sin u\,du$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{16}(4u - \sin 4u)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \qquad \text{(according to my calculator)}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

■

8. Bónusz

Ha marad idő, akkor még egyszer átfuthatnátok a következő példán, az órán eléggé összecsaptam, a vége nem fért rendesen bele. A Gnädig-féle Vektorszámítás III könyvben is benn van.

Számoljuk ki a következő integrált!

$$\iiint \frac{1}{r}\mathrm{divgrad}\phi dV = ?, \tag{23}$$

ahol ϕ sima, és $\phi(R \to \infty) = 0$, vagy $\phi(r \geq R) = 0$. Használjuk ki, hogy

$$\Psi\mathrm{divgrad}\phi = \mathrm{div}(\Psi\mathrm{grad}\phi - \phi\mathrm{grad}\Psi) + \phi\mathrm{divgrad}\Psi$$

$$\sum_i \Psi\partial_i\partial_i\phi = \sum_i \left[\partial_i(\Psi\partial_i\phi - \phi\partial_i\Psi) + \phi\partial_i\partial_i\Psi\right] =$$

$$= \sum_i \partial_i\Psi\partial_i\phi + \Psi\partial_i^2\phi - \partial_i\phi\partial_i\Psi - \phi\partial_i^2\Psi + \phi\partial_i^2\Psi \tag{24}$$

Az egyszerűsítések után az azonosság látható. Legyen $\Psi = 1/r$! Legyen az integrálandó tartomány egy R sugarú gömb, amiből kivágtunk egy ε sugarú gömböt (mindkettő az origóban van). Erre a tartományra a $\mathrm{divgrad}1/r \equiv 0$.

(Meg lehet mutatni!) Ekkor

$$\iiint_{\varepsilon\geq r\geq R}\frac{1}{r}\mathrm{divgrad}\phi dV=\iiint_{\varepsilon\geq r\geq R}\mathrm{div}\left[\frac{1}{r}\mathrm{grad}\phi-\phi\mathrm{grad}(1/r)\right]dV=$$
$$=\oiint_{r=R}\left[\frac{1}{r}\mathrm{grad}\phi-\phi\mathrm{grad}(1/r)\right]d\mathbf{F}-\oiint_{r=\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\mathrm{grad}\phi-\phi\mathrm{grad}(1/r)\right]d\mathbf{F}$$

A R sugarú gömbre vett felületi integrál ϕ-re szabott feltételek miatt zérus.

$$\oiint_{r=\varepsilon}\frac{1}{r}\mathrm{grad}\phi d\mathbf{F}\geq\frac{1}{\varepsilon}M\oiint_{r=\varepsilon}d\mathbf{F}=4\pi\varepsilon M\to 0, \tag{25}$$

ahol $M=\max(\mathrm{grad}\phi)$ az ε sugarú gömbön. Az utolsó tag:

$$\oiint_{r=\varepsilon}\phi\mathrm{grad}\frac{1}{r}d\mathbf{F}=\frac{1}{\varepsilon}\oiint_{r=\varepsilon}\phi\frac{-\mathbf{r}}{r^3}dF=\oiint_{r=\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\frac{1}{\varepsilon^2}dF=4\pi\varepsilon\phi(0) \tag{26}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathbf{r}$ párhuzamos $d\mathbf{F}$-fel. Illetve, hogy ϕ folytonossága miatt $\varepsilon\to 0$ esetén az integrál $4\pi\varepsilon^2\phi(0)$-t ad.

Ez a legvége már nem igazán ment át, illetve, hogy ez egy mennyire hasznos azonosság, ld. Dirac-delta, de azt még nem tanulták.