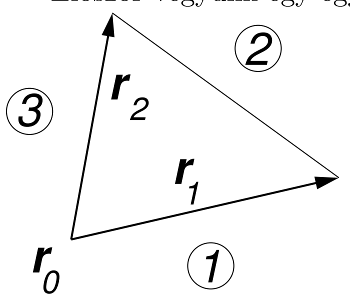
Integrál tételek

Stokes tétel

Tétel: Legyen $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ egy vektortér. Egy zárt görbére történő körintegrált ekkor átírhatunk egy a görbe által bezárt felületre vett integrálra:

$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \mathrm{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{A}\ .$$

Először vegyünk egy egyszerű zárt görbét, tekintsünk a következő háromszöget:



Az $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1$ (infinitezimálisan) kicsiny vektorok az $\mathbf{r}_0$ pontból indulnak és egy háromszöget feszítenek ki. Közelítsük a háromszög 1, 2, 3 oldalai mentén a $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektortér vonalintegráljait:

$$\begin{aligned}
\int_1 \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{V}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1)\right)\mathbf{r}_1 \\
\int_2 \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1) + \mathbf{V}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_2)\right)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \\
\int_3 \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{V}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_2)\right)\mathbf{r}_2
\end{aligned}$$

A három járulék összegére a következő egyenletet kapjuk:

$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_2 - \mathbf{V}(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_2)\mathbf{r}_1\right)$$

Használjuk ki, hogy $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ infinitezimálisan kicsiny vektorok és fejtsük sorba a $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektortetert $\mathbf{r}_0$ körül:

$$V_i(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1) = V_i(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial V_i}{\partial r_j} r_{1j}\ ,$$

így az integrált a következőképpen írhatjuk fel:

$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial r_j} r_{1j} r_{2i} - \frac{\partial V_i}{\partial r_j} r_{2j} r_{1i}\right)\ ,$$

ahol a kétszer szereplő indexekre összegzünk. Cseréljük fel a m ásodik tagban az indexeket:

$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial r_j} - \frac{\partial V_j}{\partial r_i}\right) r_{1j} r_{2i}\ .$$

Az előző egyenletben a $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ derivált tenzorának az antiszimmetrikus része szerepel. Tudjuk, hogy egy 3×3-as antiszimmetrikus mátrixszal való szorzást felfoghatunk úgy is, mint egy alkalmas vektorral való kereszt szorzást:

$$\underline{\underline{A}}\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} \ .$$

Ismételjük át, hogy hogyan azonosíthatjuk az $\mathbf{a}$ vektor komponenseit:

$$\begin{pmatrix} a_y r_z - a_z r_y \\ a_z r_x - a_x r_z \\ a_x r_y - a_y r_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Térjünk vissza a körintegrálhoz! A deriválttenzor antiszimmetrikus részét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_x}{\partial r_y} - \frac{\partial V_y}{\partial r_x} & \frac{\partial V_x}{\partial r_z} - \frac{\partial V_z}{\partial r_x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial r_x} - \frac{\partial V_x}{\partial r_y} & 0 & \frac{\partial V_y}{\partial r_z} - \frac{\partial V_z}{\partial r_y} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r_x} - \frac{\partial V_x}{\partial r_z} & \frac{\partial V_z}{\partial r_y} - \frac{\partial V_y}{\partial r_z} & 0 \end{pmatrix}$$

Leolvashatjuk az antiszimmetrikus tenzorhoz tartozó vektor komponenseit és felismerhetjük benne a vektortér rotációját:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial r_y} - \frac{\partial V_y}{\partial r_z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial r_z} - \frac{\partial V_z}{\partial r_x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial r_x} - \frac{\partial V_x}{\partial r_y} \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\mathbf{V} \ .$$

Ezek szerint a körintegrál:

$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\mathbf{V} \times \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \ ,$$

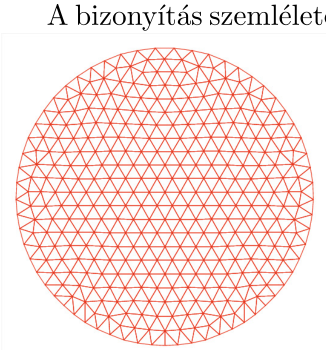
alakú lesz, ahol kihasználtuk a hármasszorzat tulajdonságait. Az $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ keresztszorzata éppen a háromszög területével, vagyis a felület elem vektorral egyezik meg:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = d\mathbf{A} \ ,$$

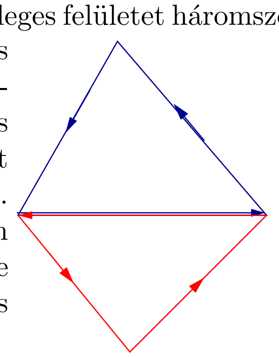
tehát

$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mathrm{rot}\mathbf{V} d\mathbf{A}$$

A bizonyítás szemléletes általánosításához osszunk fel egy tetszőleges felületet háromszögekre:



Nagyítsunk ki két szomszédos háromszöget. Az érinkező oldalak irányítása a háromszögek azonos körüljárása esetén ellentétes lesz, ezért itt a vonalintegrálok kiejtik egymást. A teljes felületen csak a határon nem tünik el a vonalintegrál. Összegezve a háromszögekre a tétel szemléletes bizonyítását kapjuk:



$$\oint \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \mathrm{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{A} \ .$$