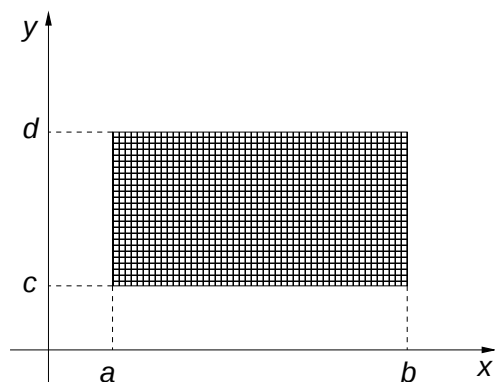


Többdimenziós integrálok

Integrál téglalap alakú tartományon



Az $I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ integrált

két egymás utáni integrállal végezhetjük el:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad I = \int_c^d F(y) dy.$$

Példaként határozzuk meg egy téglalap tömegközéppontját, amelynek a sűrűségét a következőképpen adhatjuk meg: $\rho(x, y) = \alpha x + \rho_0$. A téglalap két különböző oldalának a hossza legyen a és b .

$$M = \int_0^b \int_0^a (\alpha x + \rho_0) dx dy = \int_0^b a(\alpha x + \rho_0) dx = \frac{1}{2} a \alpha b^2 + a \rho_0 b = ab \left(\frac{1}{2} a \alpha + \rho_0 \right)$$

$$XM = \int_0^b \int_0^a (\alpha x + \rho_0) x dx dy = \int_0^b a(\alpha x + \rho_0) x dx = \frac{1}{3} a \alpha b^3 + \frac{1}{2} a \rho_0 b^2 = ab^2 \left(\frac{1}{3} a \alpha + \frac{1}{2} \rho_0 \right)$$

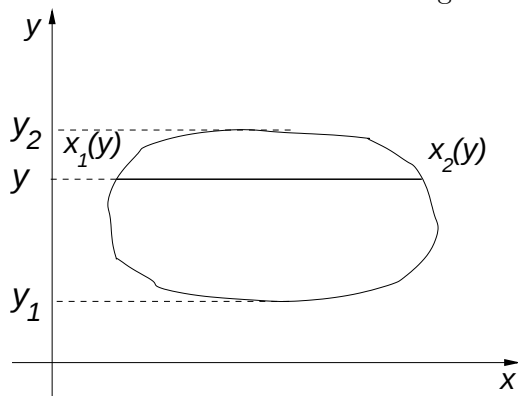
$$YM = \int_0^b \int_0^a (\alpha x + \rho_0) y dx dy = \int_0^b \frac{1}{2} a^2 (\alpha x + \rho_0) dx = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{1}{2} ab \alpha + b \rho_0 \right)$$

$$X = \frac{b}{3} \frac{2a\alpha + 3\rho_0}{a\alpha + 2\rho_0}, \quad Y = \frac{a}{2}$$

Integrál tetszőleges alakú tartományon

Tetszőleges tartományon is az előzőekhez hasonlóan, két egymás utáni integrállal végezzük el a műveletet, de ebben az esetben az első integrál határai is függeni fognak a másik változótól.

Ha először az x változó szerint integrálunk:



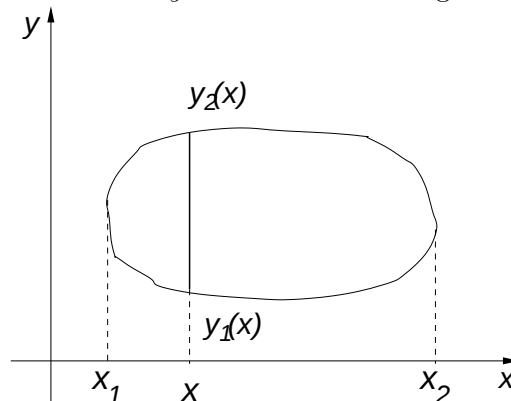
$$\int_T f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} F(y) dy$$

ahol

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx .$$

A két integrálnak természetesen meg kell egyeznie!

Ha először az y változó szerint integrálunk:



$$\int_T f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

ahol

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy .$$

Határozzuk meg egy ellipszis területét!

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

A kérdéses területre fennáll a következő feltétel:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$$

A tartomány határán az egyenlőség teljesül. Az y változók nyilvánvalóan $-b$ és b között változhatnak, míg az x változó határára a következő egyenlet érvényes:

$$-f(y) = -a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \leq x \leq a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = f(y)$$

$$T = \int_{-b}^b dy \int_{-f(y)}^{f(y)} dx = \int_{-b}^b 2a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy$$

Az integrál meghatározásához használjuk a $y = b \sin(\varphi)$ helyettesítést. Ekkor $dy = b \cos(\varphi)$, az integrál pedig a következő lesz:

$$T = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\varphi) d\varphi = ab\pi .$$

Természetesen fordított sorrendben is elvégezhetjük volna az integrálást, ekkor, természetesen, az integrálási határok is változtak volna, de a végeredmény változatlan marad.

3D integrálok

A két domenziós integrálokhoz hasonlóan három dimenzióban háromszor kell integrálnunk az egyes Descartes koordináták szerint.

Először rögzítjük y és z értékét és integrálunk az x változó szerint:

$$F(y, z) = \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx ,$$

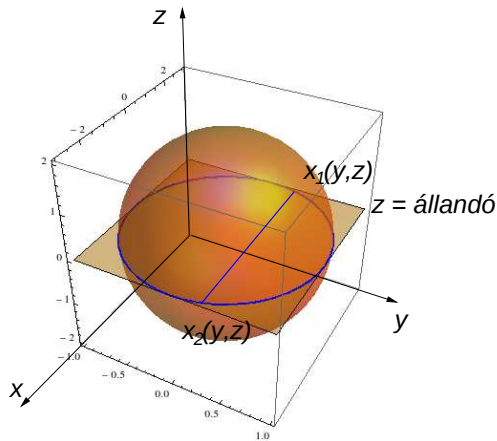
így egy kétváltozós függvényt kapunk, amelyet az előzőekhez hasonlóan integrálhatunk. Összefoglalva:

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)}$$

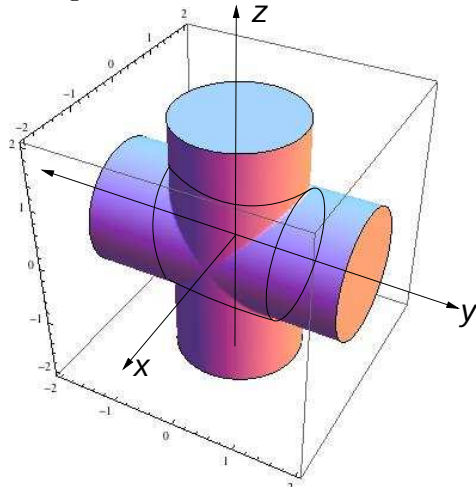
Az eljárást kiterjeszthetjük tetszőleges dimenzióra! Egy tipikus példa hat dimenziós integrálra egy $\rho(\mathbf{r})$ töltésfelhő energiájának a meghatározása:

$$E = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1^3 d\mathbf{r}_2^3 ,$$

ahol a $d\mathbf{r}^3 = dx dy dz$ jelölést használtuk.



Határozzuk meg két R sugarú, egymásra merőleges tengelyű henger közös részének a térfogatát!



A hengerek tengelyei essenek egybe az y és z tengelyekkel. Ebben az esetben a két henger egyenlete a következő lesz:

$$R^2 = x^2 + y^2, \quad R^2 = x^2 + z^2$$

A két henger közös részére a következő két feltételnek kell teljesülnie.

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x^2 + z^2 \leq R^2$$

A térfogat meghatározásához integráljuk az $f(x, y, z) \equiv 1$ függvényt!

Rögzítsük x és y értékét úgy, hogy eleget tegyenek az előző feltételeknek és integráljunk z szerint:

$$I_1(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz = 2\sqrt{R^2-x^2}$$

Második lépésként integráljuk az $I_1(x, y)$ függvényt az y változó szerint figyelembe véve a határookra vonatkozó feltételt:

$$I_2(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2} dy = 4(R^2-x^2)$$

Végül integráljunk $-R$ -tól R -ig:

$$V = \int_{-R}^R 4(R^2-x^2) dx = \frac{16}{3}R^3$$

Többdimenziós integrálok polár és gömbi koordináta rendszerekben

Az integrálokat gyakran kényelmesebb polár vagy gömbi koordinátákban számítani, gondoljunk csak pl. a kör területének a kiszámítására. Hogyan térhetünk át Descartes koordinátákról polár koordinátákra? Először vizsgáljuk meg a 2D polár koordináták esetét! Ebben az esetben az a feladatunk, hogy a kis dx , dy , egymásra merőleges elmozdulások által kifeszített négyzet területét meghatározzuk az r , φ polár koordináták segítségével.

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

A dx, dy elmozdulásokat a sebességekből kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dt} dt = \left(\frac{dr}{dt} \cos(\varphi) - \frac{d\varphi}{dt} r \sin(\varphi) \right) dt = dr \cos(\varphi) - r d\varphi \sin(\varphi) \\ dy &= \frac{dy}{dt} dt = \left(\frac{dr}{dt} \sin(\varphi) + \frac{d\varphi}{dt} r \cos(\varphi) \right) dt = dr \sin(\varphi) + r d\varphi \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Írjuk fel az előző egyenletet az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ x és y tengelyekkel párhuzamos egység vektorok és az $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$, az előzőekben bevezetett egységvektorok segítségével:

$$\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi$$

A dx, dy , egymásra merőleges elmozdulások által kifeszített négyzet területét a polár koordináták segítségével egyszerűen felírhatjuk:

$$dxdy = r dr d\varphi .$$

Gömbi koordináta rendszerben hasonlóan járhatunk el:

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) d\vartheta - r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) d\varphi \\ dy &= dr \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) d\vartheta + r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) d\varphi \\ dz &= dr \cos(\vartheta) - r \sin(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

Az előző esethez hasonlóan írjuk fel az infinitezimális tartományt az egységvektorok segítségével:

$$\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{e}_\varphi r \sin(\vartheta) d\varphi .$$

Az infinitezimális térfogat elemet egyszerűen kifejezhetjük a gömbi változókkal:

$$dxdydz = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi .$$

Általánosságban ha az i -dik Descartes koordinátát az $r_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ függvénnyel adjuk meg, amelyben $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ az új koordináták, akkor a térfogat elemet kifeszítő három vektort ezek parciális deriváltjaival állíthatjuk elő:

$$\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz = \mathbf{a}_1 d\zeta_1 + \mathbf{a}_2 d\zeta_2 + \mathbf{a}_3 d\zeta_3 ,$$

ahol $\mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial r_1}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial r_2}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial r_3}{\partial \zeta_i} \right)^t$. A térfogat elem az $\mathbf{a}_i$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata lesz $d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$ szorzattal beszorozva. A paralelepipedon térfogata nyilvánvalóan a három vektorból képzett 3×3 -as mátrix determinánsával, az úgy nevezett Jacobi-determinánssal egyezik meg.