Polar koordináta rendszer

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Határozzuk meg a jobb és baloldal x és y szerinti parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(\varphi)\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \cos(\varphi)\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 &= \sin(\varphi)\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 1 &= \sin(\varphi)\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

Foglaljuk össze a fenti egyenleteket egy mátrix egyenletbe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Az r, φ polár koordináták deriváltjait a fenti mátrix invertálásával állíthatjuk elő:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Példaként határozzuk meg a $f(r,\varphi)$ skalár mező gradiensét:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ r\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix},$$

vagy kifejtve a fenti egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

A kétdimenziós Laplace operátor meghatározása polár koorddináta rendszerben valamivel hosszadalmasabb számolást igényel:

$$\begin{aligned} \Delta f(r,\varphi) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f(r,\varphi) \\ &+ \left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f(r,\varphi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta f(r,\varphi) &= \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && (2)\\
&+ 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi} && (3)\\
&+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial r} && (4)\\
&+ \left(\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial \varphi} && (5)\\
&+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial \varphi} && (6)
\end{aligned}
$$

A 1. egyenlet felhasználásával a fenti egyenlet egyes tagjait a következőképpen írhatjuk fel.

2. sor

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 &= \cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2=1\\
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{r^2}\left(\sin(\varphi)^2+\cos(\varphi)^2\right)=\frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

tehát a második sor a következő alakú lesz:

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\varphi^2}
$$

3. sor

$$
\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{r}\cos(\varphi)\sin(\varphi)+\frac{1}{r}\sin(\varphi)\cos(\varphi)=0
$$

vagyis a 3. sor nem ad járulékot.

4. sor

$$
\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}=-\sin(\varphi)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}=\cos(\varphi)
$$

$$
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{1}{r}\left(\sin(\varphi)^2+\cos(\varphi)^2\right)\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}
$$

5. sor

$$
\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{1}{r^2}\sin(\varphi)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\cos(\varphi)
$$

$$
\left(\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{r}\left(\cos(\varphi)\sin(\varphi)-\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right)=0
$$

6. sor

$$
\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{1}{r}\cos(\varphi)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{1}{r}\sin(\varphi)
$$

$$
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{r}\left(\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\cos(\varphi)\sin(\varphi)\right)=0
$$

Tehát csak a 2. és a 4. sor ad járulékot a Laplace operátor 2D polár koordináta rendszerbeli kifejezésébe:

$$\Delta f(r,\varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\varphi^2}\,.$$

3D henger koordináta rendszerben nyilvánvalóan hasonló alakot fogunk kapni:

$$\Delta f(r,\varphi,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Differenciáloperátorok gömbi koordináta rendszerben

Gömbi koordináták: (r, ϑ, φ)

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

A polár koordinátarendszer esetéhez hasonlóan írjuk fel a deriváltakat mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -r\sin(\vartheta) \\ -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

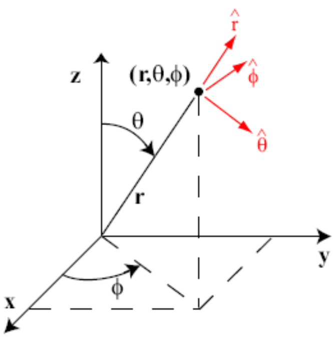
Mielőtt mátrix inverzió segítségével meghatároznánk a Descartes koordináták gömbi koordináták szerinti deriváltját bontsuk szét az előző egyenlet jobb oldalán álló mátrixot két mátrix szorzatára:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\sin(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

Egyszerűen meggyőződhetünk róla, hogy a második mátrix oszlopai és sorai merőlegesek egymásra, tehát az inverzét a mátrix transzponálásával -a főátlóra való tükrözéssel - kaphatjuk meg. Egy diagonális mátrix inverze diagonális mátrix marad főátlójában a diagonális elemek reciprokával:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin(\vartheta)} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Idézzük fel a helyvektorok deriváltjainál bevezetett egységvektorokat:



$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gömbi koordináta rendszer.
$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{e}_\vartheta$, $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{e}_\varphi$

Vegyük észre, hogy a 7. számú egyenletben szereplő mátrix az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ oszlopvektorokból épül fel. A gradiens műveletét (operátorát) mátrixos jelöléssel a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Behelyettesítve a 7. egyenletet a gradiens operátort a következő alakban írhjatjuk fel a három egységvektor segítségével:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{8}$$

Természetesen az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ vektorok nem állandó vektorok. Határozzuk meg a gömbi koordináták szerinti parciális deriváltjaikat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\vartheta \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\varphi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} &= \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_r \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\vartheta)\mathbf{e}_\varphi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \vartheta} &= 0 \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin(\vartheta)\mathbf{e}_r - \cos(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta \ .
\end{aligned}$$

Határozzuk meg egy V vektortér divergenciáját gömbi koordináta rendszerben!
Alkalmazzuk a 8. képletet:

$$div\mathbf{V} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{V} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{V} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{V}$$

Gyakran célszerű a vektorteret is az $\mathbf{e}_r$,$\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ vektorok segítségével megadni:

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_r V_r + \mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi V_\varphi \ ,$$

ahol $V_r = \mathbf{e}_r \mathbf{V}$, $V_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{V}$ és $V_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \mathbf{B}$. Helyettesítsük be a divergencia képletébe:

$$\begin{aligned}
div\mathbf{V} &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_r) + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta) + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_\varphi V_\varphi) \\
&+ \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\mathbf{e}_r V_r) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\mathbf{e}_\varphi V_\varphi) \\
&+ \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{e}_r V_r) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{e}_\varphi V_\varphi)
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be a $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok deriváltjait és használjuk ki azt a tényt, hogy merőlegesek (ortogonálisak) egymásra:

$$\begin{aligned}
div\mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial r}V_r + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}V_\vartheta + \frac{1}{r}V_r + \frac{\cos(\vartheta)V_\vartheta}{r\sin(\vartheta)} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}V_\varphi \\
&= \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2V_r}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{V_\vartheta \cos(\vartheta)}{r\sin(\vartheta)}\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(V_\vartheta \sin(\vartheta)\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\boxed{div\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(V_\vartheta \sin(\vartheta)\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \qquad (9)}$$

Laplace operátor gömbi koordináta rendszerben:
Legyen $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ egy skalár tér. A Laplace operátor hatását a skalár téren úgy kaphatjuk meg, ha meghatározzuk a gradiensének a divergenciáját:

$$\begin{aligned}
div\nabla\Phi &= div\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \,.
\end{aligned}$$

Az divergencia kifejezésében szereplő vektorterek komponensei ebben az esetben rendre:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,, \quad V_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\,, \quad V_\varphi = \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\,,$$

amelyeket a divergencia 9. számú képletébe helyettesítettünk be.