1. Egy részecske egyenletes sebességgel haled egy egyenesen az ábrán látható koordináta rendszerben. Határozzuk meg a sebességét polár koordináta rendszerben!

2. Az előadáson meghatároztuk, hogy három légy mennyi idő múlva találkozik, ha mozgásuk során mindig a tőlük jobbra lévő társuk felé haladnak és kezdetben egy szabályos háromszög csúcsain helyezkednek el. Adjuk meg a gyorsulásukat a pályájuk mentén!

3. Egy léghajó az egyenlítőről indulva az északi sark felé halad a földgömbhöz rögzített rendszerben egyenletes v sebességgel. Adjuk meg a sebességét az idő függvényében a földgömb középpontjához rögzített, a Nap körül keringő koordináta rendszerben!

Megoldások:

1. Írjuk fel a helyvektort polárkoordinátákkal:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

A sebességről tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \ .$$

A fenti egyenletrendszerből egyszerűen meghatározhatjuk $\dot{r}$ és $r\dot{\varphi}$ ismeretleneket:

$$\dot{r} = v\cos(\varphi) \qquad\qquad r\dot{\varphi} = -v\sin(\varphi) \ ,$$

tehát

$$\mathbf{v} = v\cos(\varphi)\mathbf{e}_r - v\sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi \ .$$

2. A legyek sebességére a következő egyenlet teljesül:

$$\mathbf{v} = -v\cos(30^\circ)\mathbf{e}_r + v\sin(30^\circ)\mathbf{e}_\varphi \ .$$

A gyorsulásukat az előző egyenlet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$\mathbf{a} = -v\cos(30^\circ)\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r + v\sin(30^\circ)\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi \ .$$

Ne feledjük el, hogy az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ vektorok maguk is függenek az időtől:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \qquad\qquad \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \ ,$$

így a gyorsulásra a következő kifejezést kapjuk:

$$\mathbf{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{2}v\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \ .$$

Felhasználva, hogy $r\dot{\varphi} = \frac{1}{2}v$ a következő eredményt kapjuk:

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\mathbf{e}_r\right) \ .$$

3. Gömbi koordináta rendszerben a földgömb felületén északi irányban haladó hajó sebességét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{v} = r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + r\sin(\vartheta)\omega\mathbf{e}_\varphi \ ,$$

ahol ω a föld forgásának a szögsebessége, $r\dot{\vartheta} = v$ pedig a hajó sebessége. Mivel a hajó az egyenlítőtől egyenletes sebességgel halad az északi sark felé, a polár szög időfüggését a következőképpen adhatjuk meg: $\vartheta = \pi/2 - (v/r)t$. Tehát a sebesség:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_\vartheta + r\omega\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right) \ .$$