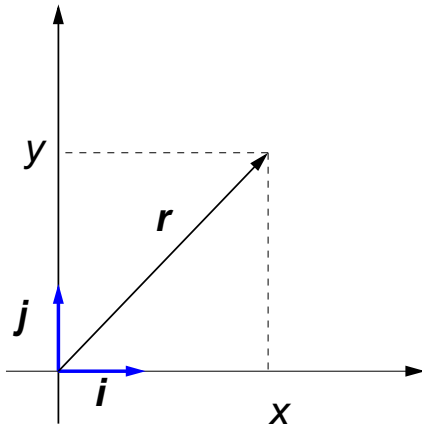


2D

3D

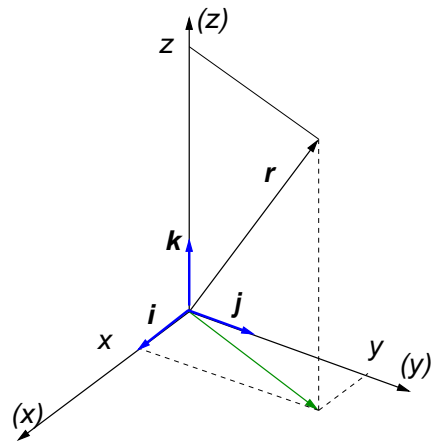
---

Descartes koordináta rendszer



$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$



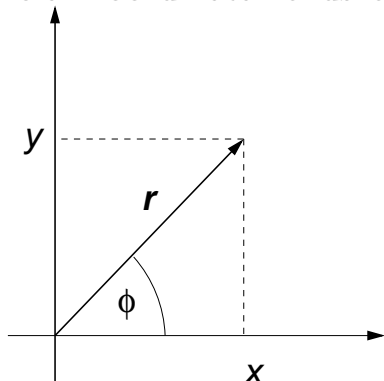
$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

## 2D

## 3D

## Polár koordináta rendszer



Polar koordináták:  $(r, \varphi)$ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$$

Áttérés Descartes koordinátákra:

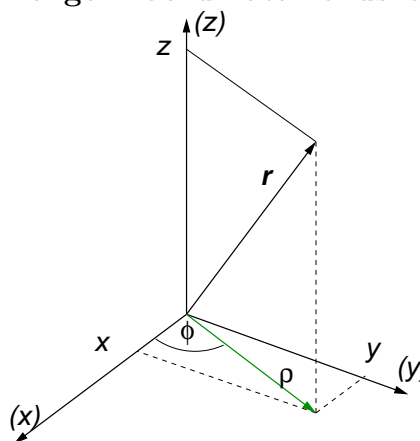
$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

Jacobi determináns:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} = r$$

## Henger koordináta rendszer



Polar koordináták:  $(\rho, \varphi, z)$ .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Áttérés Descartes koordinátákra:

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

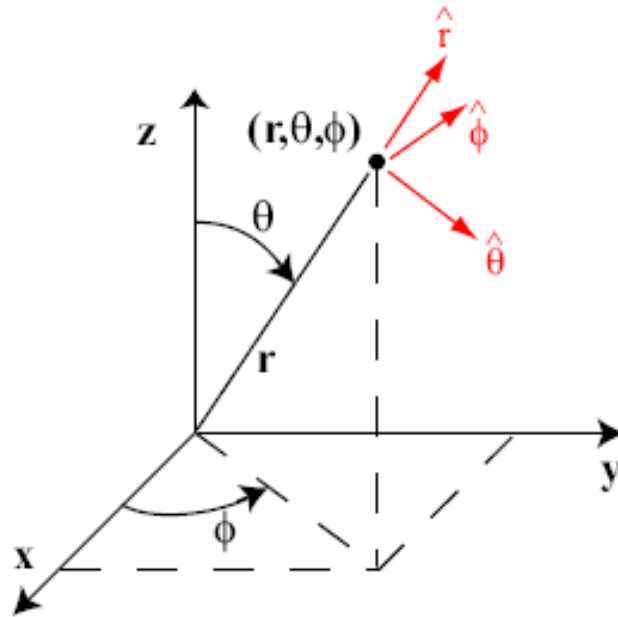
$$y = \rho \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

Jacobi determináns:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\rho \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

### 3D Gömbi koordináta rendszer



Polar koordináták:  $(r, \varphi, \vartheta)$ .

Áttérés Descartes koordinátákra:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{z}{r}$$

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\vartheta)$$

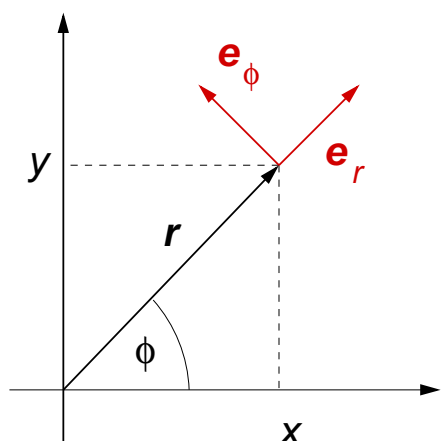
Jacobi determináns:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\ -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & 0 \\ r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \end{vmatrix} = r^2 \sin(\vartheta)$$

## 2D polár koordináta rendszer

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \dot{r} \sin(\varphi) + r\dot{\varphi} \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



Vezessük be a

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

egységvektorokat! Ezek segítségével az  $\mathbf{r}$  helyvektor idő szerinti deriváltját a következőképpen írhatjuk fel:  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ . Vegyük észre, hogy az  $\mathbf{e}_r$  és  $\mathbf{e}_\varphi$  merőlegesek egymásra:  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$ , amint azt a baloldali ábrán is láthatjuk. Tanulságos meghatározni a második deriváltakat is:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$$

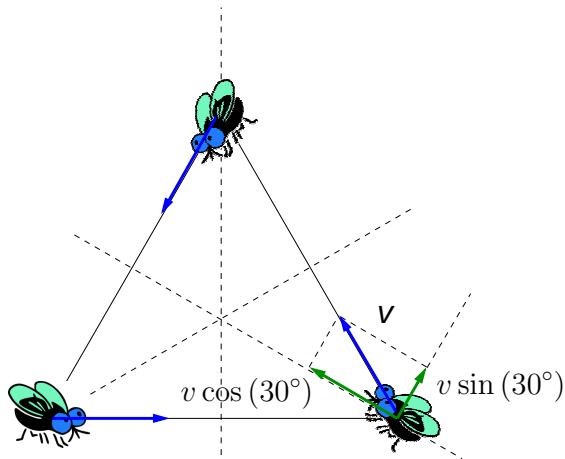
Idézzük fel, hogy mit tanultunk a körmozgásról! Válasszuk a koordináta rendszerünk origójának a kör középpontját! Ebben az esetben, miután a kör sugara állandó,  $\dot{r} = 0$ , így  $\dot{\mathbf{r}}$  és  $\ddot{\mathbf{r}}$  a következő alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Az első tag azt fejezi ki, hogy a sebességnek csak érintő irányú komponense van, amely  $v = r\omega$  nagyságú, ahol  $\omega = \dot{\varphi}$ . A második egyenletben ráismerhetünk az  $a_{cp} = r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2$  centripetális gyorsulásra, amely a mozgás középpontja felé mutat és az  $a_t = r\ddot{\varphi}$  tangenciális gyorsulásra, amely érintő irányú.

**Példa:**

Három légy ül egy szabályos háromszög három csúcsán. Egyszer csak elindulnak egymás felé úgy, hogy mindegyik légy a tőle jobbra lévő légy irányába mozog állandó  $v$  sebességgel. Mennyi idő múlva találkoznak, ha a háromszög oldalának a hossza  $a$ ?



Válasszuk az origókat a háromszög középpontjába és használjunk polár koordinátákat. Ekkor az ábráról leolvashatóan:

$$\dot{r} = -v \cos(30^\circ), \quad r\dot{\varphi} = v \sin(30^\circ)$$

Kezdetben a legyek  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$  távolságra vannak a középponttól és állandó  $v \cos(30^\circ) = v \frac{\sqrt{3}}{2}$  sebességgel mozognak felé:

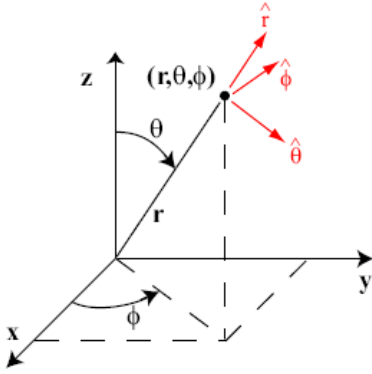
$$r(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}a - v \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

vagyis  $t = \frac{2}{3} \frac{a}{v}$  idő múlva találkoznak az origóban.

### 3D gömbi koordináta rendszer

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + r \dot{\vartheta} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) - r \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \dot{r} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + r \dot{\vartheta} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) + r \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \dot{r} \cos(\vartheta) - r \dot{\vartheta} \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \dot{r} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} + r \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} + r \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Vezessük be a három egymásra merőleges egységvektort, amelyek egy jobbsodrású Descartes koordináta rendszert alkotnak:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Gömbi koordináta rendszer.**

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{e}_\vartheta, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{e}_\varphi$$

Az egységvektorok segítségével a helyvektor deriváltja a következőképpen írható fel:

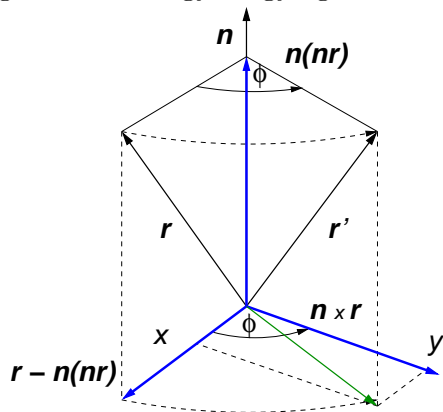
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\varphi$$

## Egységvektor idő szerinti deriváltja

Az egységvektor hossza időben állandó, ezért négyzetének idő szerinti deriváltja eltűnik. Ebből következően az idő szerinti deriváltja merőleges lesz az eredeti egységvektorra:

$$\frac{de^2}{dt} = \dot{\mathbf{e}} = 0.$$

Ha a vektorunk hossza az időbeli fejlődése során állandó, akkor nyilvánvalóan  $t$  pillanattól  $t + \Delta t$ -ba egy forgatással juthatunk. Ismételjük át azt, hogy egy tetszőleges  $\mathbf{r}$  vektort miként forgathatunk el egy  $\mathbf{n}$  egységvektor körül  $\varphi$  szöggel:



$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}) + (\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})) \cos(\varphi) + \mathbf{n} \times \mathbf{r} \sin(\varphi)$$

Határozzuk meg a fenti képlet segítségével az  $\mathbf{e}$  egységvektor deriváltját:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}(t + \Delta t) - \mathbf{e}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{e}) + (\mathbf{e} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{e})) \cos(\Delta\varphi) + \mathbf{n} \times \mathbf{e} \sin(\Delta\varphi) - \mathbf{e}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \mathbf{n} \times \mathbf{e} = \dot{\varphi} \mathbf{n} \times \mathbf{e}, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy  $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1$  és  $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = \Delta\varphi$ . Érdeemes bevezetni az  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n}$  szögsebesség vektort, amellyel egy állandó hosszúságú vektor deriváltja egyszerűen kifejezhető:

$$\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$$