

Számítási Módszerek a Fizikában 1.

(fizikus szak) 2. zárthelyi

2014. november 27. 8:15–9:45, QAF14 terem

1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az A és B mátrixok determinánsát! Melyik mátrix invertálható?
Mennyi az egyes mátrixok rangja?

(12p)

2. Gauss-kiküszöböléssel határozzuk meg az

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = ?$$

egyenletrendszer összes \mathbf{x} megoldását! Mennyi az A mátrix rangja?

(12p)

3. Legyen \mathbb{V} háromdimenziós valós euklideszi tér, és legyen $\mathcal{K} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \subset \mathbb{V}$ ortonormált bázis \mathbb{V} -ben. Legyen továbbá $\mathbf{t} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k} \in \mathbb{V}$, és jelölje \mathcal{B} az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{t}\}$ bázist. Legyen $\mathbf{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ az a lineáris transzformáció, amely az \mathbf{i} és \mathbf{j} vektorok síkjában α szögben forogat az origó körül (\mathbf{i} -től \mathbf{j} felé), és a \mathbf{t} vektort helyben hagyja.

(a) Írjuk fel az \mathbf{A} transzformáció mátrixát a \mathcal{B} bázisban! ($[\mathbf{A}]^{\mathcal{B}} = ?$)

(b) Határozzuk meg a $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{K}$ bázistranszformáció F kísérő mátrixát!

(c) Adjuk meg az \mathbf{A} transzformáció mátrixát a \mathcal{K} bázisban! ($[\mathbf{A}]^{\mathcal{K}} = ?$)

(12p)

4. Határozzuk meg az

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 11 & -2i \\ 2i & 14 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, spektrálfelbontását!

(12p)

5. Tekintsük a következő logaritmikus spirál görbét, ahol $t \in [0, a/v]$:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a - vt) \cos \left[\ln \left(\frac{a - vt}{a} \right) \right] \\ y(t) &= (a - vt) \sin \left[\ln \left(\frac{a - vt}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az így kapott görbe ívhosszát! Adjuk meg a paraméter $t_0 = a/(2v)$ értékénél az érintő egyenes egyenletét!

(12p)