Számítási Módszerek a Fizikában 1.
(fizikus szak) 4. vizsgadolgozat
2015. január 28. 8:15–9:45, T601/602 terem

1. (a) Definiálja egy $n \times n$ méretű $[a_{i,j}]$ mátrix *determinánsát*!
   (b) Mit mondhatunk egy determinánsról, ha két sora megegyezik?
   (c) Előző állítását igazolja! (3p+2p+5p)

2. Írja fel annak az $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3)$ transzformációnak az $[\mathbf{A}]$ mátrixát ($\mathbb{R}^3$ standard bázisában), amely a $\mathbf{v} = [1, 2, 0]^T$ vektor által kifeszített altérben kétszeresre nyújt, míg az erre merőleges altérben $\mathbf{v}$ irányából nézve $+90°$-kal forgat! (Tehát $(\mathbf{u}, \mathbf{Au}, \mathbf{v})$ jobbsodrású rendszert alkot!) (10p)

3. Határozza meg a következő egyenletrendszer összes megoldását Gauss-kiküszöböléssel! Mekkora a lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja?

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z + w &= 0 \\ -x + y + 2z + 2w &= -7 \\ 3x + 2y + 4z &= 8 \\ x + w &= -1 \end{aligned}$$

(8p+2p)

4. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B(p) = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (p \in \mathbb{R})$$

   (a) Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!
   (b) Milyen valós p paraméterérték esetén normális a $B(p)$ mátrix? Mikor önadjungált? Mikor invertálható? (6p+4p)

5. * Legyen $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ tetszőleges differenciálható vektormező!

   (a) Hozza $\operatorname{div}\big(\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big)$-t olyan alakra, hogy csak $\mathbf{v}$ deriváltjai szerepeljenek benne!
   (b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x^2 y \\ 2x - yz \\ 3z \end{bmatrix}$ esetén határozza meg az előző alkérdésben szereplő kifejezés értékét! (5p+5p)

6. *

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=\sqrt{y}}^{1} \sin(x^3)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = ?$$

   Rajzolja fel az integrálási tartományt, cserélje fel az integrálok sorrendjét és határozza meg az integrál értékét! (2p+4p+4p)

Maximum: 60 pont. A vizsga elégtelen, ha az összpontszám ném éri el a 40%-ot (24 pontot), vagy ha külön a *-os feladatok pontszáma nem éri el a 40%-ot (8 pontot).