Számítási Módszerek a Fizikában 2015.01.08.

2. vizsga MEGOLDÁS

1, a, **Magtér**: $\operatorname{Ker} A = \{ \underline{x} \in \mathbb{U} \mid A\underline{x} = 0 \}$ (1)

Képtér: $\operatorname{Ran} A = (\operatorname{Im} A) = \{ \underline{y} \in \mathbb{V} \mid \exists\, \underline{x} \in \mathbb{U} : A\underline{x} = \underline{y} \}$ (1)

b, **Dimenziótétel**: $A: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ lin. leképezés, $\dim \mathbb{U} < \infty$. (3)

Ekkor $\dim \mathbb{U} = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Ran} A$.

(Ha $\dim \mathbb{U} = \infty$, akkor $\dim \operatorname{Ker} A = \infty$ vagy $\dim \operatorname{Ran} A = \infty$.)

$\boxed{5}$ c, **Bizonyítás**: $\operatorname{Ker} A$ altér $\mathbb{U}$-ban. Legyen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n\}$ bázis $\operatorname{Ker} A$-ban. Egészítsük ki ezt az $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots \underline{f}_m\}$ vektorokkal (2) bázissá $\mathbb{U}$-ban. Ekkor $\{A\underline{f}_1, A\underline{f}_2, \dots A\underline{f}_m\}$ bázis $\operatorname{Ran} A$-ban, hiszen $\{A\underline{b}_1 = A\underline{b}_2 = \dots = A\underline{b}_n = 0,\ A\underline{f}_1, \dots A\underline{f}_m\}$ generátorrendszer (1) $\operatorname{Ran} A$-ban, és $\{A\underline{f}_1, \dots A\underline{f}_m\}$ lineárisan független rendszer. Ugyanis ha

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A\underline{f}_i = A\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{f}_i\right), \text{ akkor } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{f}_i \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \alpha_i = 0. \quad (2)$$

2, a, Vegyes szorzat:

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(0-3-2)}_{-5} - \underbrace{(0-1-6)}_{-7} = 2$$

$$\underline{A} = \frac{\underline{b} \times \underline{c}}{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0+1 \\ -2+1 \\ -2-0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \frac{\underline{c} \times \underline{a}}{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+3 \\ 1-1 \\ -3+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3-0 \\ 2-1 \\ 0+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(5)

b, c, Látható, hogy

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T \\ \hline \underline{B}^T \\ \hline \underline{C}^T \end{bmatrix} \cdot \left[\, \underline{a} \,\middle|\, \underline{b} \,\middle|\, \underline{c} \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tehát

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \quad (3)$$

Általában, egy bázisból, mint oszlopokból képzett mátrix inverze megegyezik a rec. bázisból, mint sorokból képzett mátrixszal. (2)

3, Linearitás: $f, g \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$(A_\delta(\alpha f+\beta g))(x) = (\alpha f+\beta g)(x+\delta) = \alpha f(x+\delta)+\beta g(x+\delta) =$$
$$= \alpha (A_\delta f)(x) + \beta (A_\delta(g))(x) = (\alpha A_\delta f + \beta A_\delta g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén,}$$

tehát $A_\delta(\alpha f+\beta g) = \alpha A_\delta f + \beta A_\delta g$ ✓ (3)

[7] Legyen $b_1 : x \mapsto \sin(x)$; $b_2 : x \mapsto \cos x$.

$$(A_\delta b_1)(x) = \sin(x+\delta) = \sin x \cos\delta + \cos x \sin\delta = (\cos\delta\, b_1 + \sin\delta\, b_2)(x) \quad (2)$$

$$(A_\delta b_2)(x) = \cos(x+\delta) = \cos x \cos\delta - \sin x \sin\delta = (-\sin\delta\, b_1 + \cos\delta\, b_2)(x) \quad (2)$$

Így $[A_\delta] = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix}$ (3)

4,
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3\times \\ +2\times \\ \\ -2\times \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1 \\ +1 \\ -3 \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1 \\ -2 \\ +4 \\ \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás: $\boxed{x = 2,\ y = 1,\ z = 0}$ (9)

A mátrix rangja $= \underline{3}$ („vezető egyesek" száma) (1)

5*, a, $\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \dfrac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\dfrac{\underline{r}}{r}}}$ ③

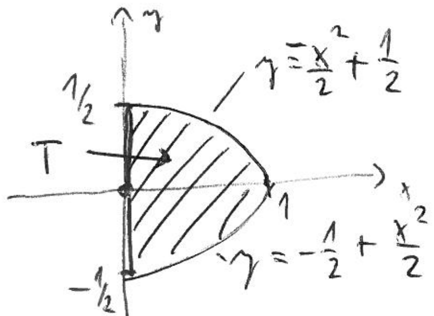
b, $\operatorname{div}(r^n \underline{v}) = \partial_i (r^n v_i) = \partial_i (r^n)\, v_i + r^n (\partial_i v_i) =$

$= n\, r^{n-1} \cdot \underbrace{(\partial_i r)}_{\frac{r_i}{r}} \cdot v_i + r^n (\partial_i v_i) = \underline{\underline{n\, r^{n-2} \cdot (\underline{r} \cdot \underline{v}) + r^n \operatorname{div} \underline{v}}}$ ⑦

—o—

6*, a, $J(\sigma, \tau) = \begin{vmatrix} x'_\sigma & x'_\tau \\ y'_\sigma & y'_\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau & \sigma \\ -\sigma & \tau \end{vmatrix} = \underline{\underline{\tau^2 + \sigma^2}}$ ②

b, A tartomány határai:



$\sigma = 0,\ 0 \le \tau \le 1 \Rightarrow x = 0,\ 0 \le y \le \frac{1}{2}$

$\tau = 0,\ 0 \le \sigma \le 1 \Rightarrow x = 0,\ -\frac{1}{2} \le y \le 0$ ④

$\sigma = 1,\ 0 \le \tau \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$ és $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

$\tau = 1;\ 0 \le \sigma \le 1 \Rightarrow 0 \le x = \sigma \le 1$ és $y(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$

c, Descartes-rendszerben:

$$T = \int_{x=0}^{1} \int_{y=\frac{x^2-1}{2}}^{\frac{1-x^2}{2}} 1 \, dy \, dx = \int_{x=0}^{1} \left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{x^2-1}{2} \right) dx = \int_0^1 (1-x^2)\, dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$ ④

VAGY

$\sigma - \tau$ rendszerben:

$$T = \int_{\sigma=0}^{1} \int_{\tau=0}^{1} (\tau^2 + \sigma^2)\, d\tau \, d\sigma = \int_{\sigma=0}^{1} \left[\frac{\tau^3}{3} + \sigma^2 \right]_{\tau=0}^{1} = \int_{\sigma=0}^{1} \left(\frac{1}{3} + \sigma^2 \right) d\sigma =$$ vagy ④

$$= \left[\frac{\sigma}{3} + \frac{\sigma^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$