Számítási Módszerek a Fizikában 1.
(fizikus szak) 2. vizsgadolgozat
2015. január 8. 8:15–9:45, T601/602 terem

1. (a) Definiálja egy $A : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ lineáris leképezés *magterét* és *képterét*!
   (b) Mondja ki a *dimenziótételt*!
   (c) Igazolja a dimenziótételt! (2p+3p+5p)

2.
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Határozza meg a $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázishoz tartozó $\mathcal{B}' = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ *reciprokbázist*! ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = 0, \dots$)
   (b) Legyen $M = \left[\mathbf{a}\middle|\mathbf{b}\middle|\mathbf{c}\right]$ a $\mathcal{B}$ bázis vektoraiból képzett mátrix! Határozza meg az M mátrix inverzét!
   (c) Mi a köze az előző két alkérdésnek egymáshoz? (Fogalmazza meg általánosan!) (5p+3p+2p)

3. Legyen $\mathbb{V} = \{\alpha \sin x + \beta \cos x \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ a $\sin x$ és a $\cos x$ függvények által generált valós vektortér (a pontonként értelmezett műveletekkel). Igazolja, hogy tetszőleges $\delta \in \mathbb{R}$ esetén az
$$A_\delta : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \qquad f \mapsto A_\delta f, \qquad (A_\delta f)(x) = f(x + \delta)$$
   leképezés lineáris, és adja meg A mátrixát az $(\sin x, \cos x)$ bázisban! (3p+7p)

4. Határozza meg a következő egyenletrendszer összes megoldását Gauss-kiküszöböléssel! Mekkora a lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja?
$$3x - 2y + 4z = 4, \qquad x - y + z = 1$$
$$-2x + 3y = -1, \qquad 2x + y + z = 5$$
   (9p+1p)

5. * Legyen $\mathbf{r} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$, $r := |\mathbf{r}|$ és $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ tetszőleges differenciálható vektormező!
   (a) Fejezze ki $\operatorname{grad} r$-et $\mathbf{r}$ és r segítségével!
   (b) Hozza $\operatorname{div}\big(r^n \mathbf{v}(\mathbf{r})\big)$-t olyan alakra, hogy csak $\mathbf{v}$ deriváltjai szerepeljenek benne! (3p+7p)

6. * A parabolikus koordinátarendszer (σ, τ) koordinátáival a következőképpen fejezhetők ki az (x, y) Descartes-kooordináták:
$$x = \sigma\tau, \qquad y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$$
   (a) Számolja ki az áttérési transzformáció $J(\sigma, \tau)$ Jacobi-determinánsát!
   (b) Ábrázolja az (x, y) síkon azokat a pontokat, melyekre $0 \le \sigma \le 1$ és $0 \le \tau \le 1$!
   (c) Határozza meg az előző pontban ábrázolt síkidom területét! (2p+4p+4p)

Maximum: 60 pont. A vizsga elégtelen, ha az összpontszám ném éri el a 40%-ot (24 pontot), vagy ha külön a *-os feladatok pontszáma nem éri el a 40%-ot (8 pontot).