

# Számítási Módszerek a Fizikában 1.

## (fizikus szak) 1. vizsgadolgozat

2014. december 17. 8:15–9:45, T601/602 terem

1. (a) Definiálja egy vektortérben a *lineárisan független rendszer*, a *generátorrendszer* valamint a *bázis* fogalmát!

(b) Igazolja, hogy tetszőleges vektor bázis szerinti kifejtése egyértelmű! (5p+5p)

2. Legyen  $\mathcal{P}_3$  a legfeljebb harmadfokú, valós, egyváltozós polinomok vektortere a szokásos (pontonként definiált) műveletekkel. Tekintsük az

$$A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad p \mapsto Ap, \quad (Ap)(x) = p(x-1)$$

leképezést!

(a) Igazolja, hogy  $A$  lineáris leképezés!

(b) Határozza meg a leképezés  $[A]$  mátrixát az  $\{1, x, x^2, x^3\}$  bázisban! (3p+7p)

3. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, spektrálfelbontását valamint  $e^A$  értékét! (10p)

4. A  $t_0 = 1$  paraméterhez tartozó pontban határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

paraméteres görbe  $G$  görbületét és a simuló sík egyenletét! (5p+5p)

5. \*

(a) Indexes számolással vezesse le a  $\text{rot}(f\mathbf{v})$  szorzatra vonatkozó Leibniz-szabályt! (Az  $f$  tetszőleges deriválható függvény,  $\mathbf{v}$  pedig tetszőleges deriválható vektormező.)

(b) Az előző pontban levezetett azonosság bal vagy jobb oldalát számolja ki az

$$f(x, y, z) = x^2y + z, \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} xy \\ z^2 + 2x \\ xyz \end{bmatrix}$$

függvények esetén!

(4p+6p)

6. \*

(a) Egy ábrán ismertesse a hengerkoordinátákat, és számolja ki a henger-koordinátarendszerbe való áttérés Jacobi-determinánsát!

(b) Számolja ki az

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$$

egyenlőtlenségekkel megadott térrész térfogatát!

(5p+5p)

---

Maximum: 60 pont. A vizsga elégtelen, ha az összpontszám nem éri el a 40%-ot (24 pontot), vagy ha külön a \*-os feladatok pontszáma nem éri el a 40%-ot (8 pontot).