1. Egyváltozós függgvények deriválása

1.1. Feladatok

1.1. Feladat *A definíció alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltját az x_0 pontban!*

a) $f(x) = 2x + 3,\ x_0 = 5$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 5},\ x_0 = 2$

c) $f(x) = \frac{1}{3x+4},\ x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}},\ x_0 = 4$

e) $f(x) = \frac{x-1}{x+1},\ x_0 = 2$

f) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}\sin(x - 2),\ x_0 = 2$

1.2. Feladat *A definíció alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltját egy általános pontban!*

a) x

b) x^2

c) x^n

d) $\frac{1}{x}$

e) $\sin(x)$

f) e^x

Segítség:. *Bizonyítás nélkül használhatjuk az alábbi két összefüggést:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

1.3. Feladat *A deriválási szabályok segtségével határozzuk meg a következő függvények deriváltját!*

a) e^{3x+2}

b) $\sin(x^2 + 3x + 4)$

c) $(x^2+1)\sqrt{1+2x^3}$

d) $\cos(\sqrt{2x^2+5})$

e) $\ln(2x^2+3)$

f) $\mathrm{tg}(x)$

g) x^x

h) $(3x^2+3)^{\sin(5x+2)}$

1.4. Feladat *Határozzuk meg a következő Taylor polinomokat!*

a) $f(x)=\sin(2x) \quad x_0=0 \quad T_3(x)=?$

b) $f(x)=\ln(1+x) \quad x_0=0 \quad T_3(x)=?$

c) $f(x)=\mathrm{tg}(x) \quad x_0=\frac{\pi}{4} \quad T_2(x)=?$

d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad x_0=0 \quad T_3(x)=?$

1.5. Feladat *Az inverz függvény deriválási szabályai alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltjait!*

a) $f(x)=\arcsin(x)$

b) $f(x)=\ln(x)$

c) $f(x)=\mathrm{tg}(x)$

d) $f(x)=\mathrm{arch}(x)$

1.6. Feladat *Adott két rögzített, egymástól ℓ távolságra kévő $Q>0$ töltés. A töltések között szabadon mozoghat egy m tömegű, $q>0$ töltésű test.*

a) *Hol van a test egyensúlyban?*

b) *Stabil-e az egyensúl?*

c) *Kis kitérés esetén milyen körfrekvenciával rezeg a kis test az egyensúlyi helyzete körül?*

1.7. Feladat *Függőleges kémcsőben egy x_0 magas levegőoszlopot ℓ magasságú higyany-oszloppal zárunk el. A külső nyomás és a súrlódás az edény falával elhanyagolhatóan kicsi, a higany sűrűsége, ρ_{Hg} ismert.*

a) *Hogyan változik a higanydugóra ható erő, ha azt egyensúlyi helyzetéből kitérítjük?*

b) *Milyen körfrekvenciával végz kis rezgéseket a csepp az egyensúlyi helye körül, ha kitérítjük?*

A feladatot oldjuk meg izotermikus és adiabatikus közelítéssel is!

1.2. Megoldások

1.1 Megoldás

a) 2

b) $\frac{1}{3}$

c) $-\frac{3}{49}$

d) $-\frac{3}{128}$

e) $\frac{2}{9}$

f) 0

1.2 Megoldás

a) 1

b) $2x$

c) nx^{n-1}

d) $-\frac{1}{x^2}$

e) $\cos(x)$

f) e^x

1.3 Megoldás

a) $3e^{3x+2}$

b) $\cos(x^2+3x+4)(2x+3)$

c) $2x\sqrt{1+2x^3}+\frac{x^2+1}{2\sqrt{1+2x^3}}6x^2$

d) $-\sin(\sqrt{2x^2+5})\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}$

e) $\frac{4x}{2x^2+3}$

f) $\frac{1}{\cos^2(x)}$

g) $x^x(\ln x+1)$

h) $(3x^2+3)^{\sin(5x+2)}\left(5\cos(5x+2)\ln(2x^2+3)+\sin(5x+2)\frac{4x}{2x^2+3}\right)$

1.4 Megoldás

a) $T_3(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$

b) $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

c) $T_2(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$

d) $T_3(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16}$

1.5 Megoldás

a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{\cos^2(x)}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.6 Megoldás

a) *A két töltés közt félúton,* $\frac{\ell}{2}$ *távolságra mindkettőtől.*

b) *Stabil, mert bármelyik töltésthez is van közelebb, az eredő erő az egyensúlyi hely irányába mutat. VAGY* $F_e < 0$*, bárhol is legyen a kis test a két* Q *töltés között.*

c) $\omega_0 = \sqrt{\frac{32kqQ}{m\ell^3}}$

1.7 Megoldás *Izoterm:*

a) $F(x) = \frac{\rho_{Hg} g \ell A x_0}{x} - mg$

b) *Az egynsúlyi pont körüli Taylor sorfejtés után* $F(x) \approx -\frac{\rho_{Hg} g \ell A}{x_0}(x - x_0)$*. Innen* $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$

Adiabatikus:

a) $F(x) = \frac{\rho_{Hg} g \ell A x_0^\gamma}{x^\gamma} - mg$

b) *Az egynsúlyi pont körüli Taylor sorfejtés után* $F(x) \approx -\frac{\gamma \rho_{Hg} g \ell A}{x_0}(x - x_0)$*. Innen* $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma g}{x_0}}$

2. Egyváltozós függgvények integrálása

2.1. Feladatok

2.1. Feladat *Adjuk meg a következő határozatlan integrálok eredményét!*

a) $\int \sin(2x+3)dx$

b) $\int (2x+3)^3 dx$

c) $\int \frac{1}{2x^2+3}dx$

d) $\int \frac{x}{2x^2+3}dx$

e) $\int xe^{x^2}dx$

f) $\int \mathrm{tg}(x)dx$

2.2. Feladat *Számoljuk ki a következő integrálokat!*

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)dx$

b) $\int \sin^4(x)\cos^2(x)dx$

Segítség:. *Ha a* $\sin^n(x)\cos^m(x)$ *alakban az egyik kiető páratlan, akkor* $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ *felhasználásával a páratlan kitevőt alakítsuk 1-é. Ha* n *és* m *is páros, térjünk át kétszeres szögekre, ha kell többször is.*

2.3. Feladat *Parciális integrálással számoljuk ki az alábbi integrálokat!*

a) $\int_0^{\pi/4} x\cos(x)dx$

b) $\int \ln(x)dx$

c) $\int \sin(2x)e^{3x}dx$

d) $\int_1^2 \mathrm{arctg}(x)dx$

2.4. Feladat *Végezzük el a következő racionális törtek integrálását!*

a) $\int \frac{3x^2+2x}{x-1}dx$

b) $\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6}dx$

2.5. Feladat *Végezzük el a következő integrálokat a kijelölt helyettesítéssel!*

a) $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx, \quad x = \sin(t)$

b) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}, \quad t = e^x$

c) $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}dx, \quad t = \mathrm{tg}(x/2)$

2.6. Feladat *Határozzuk meg a tömegközéppont helyét megadó s távolság értékét a következő testek esetén!*

a) *Homogén drótból készült R sugarú félkör*

b) *Homogén R sugarú körlap*

2.2. Megoldások

2.1 Megoldás

a) $-\frac{\cos(2x+3)}{2} + C$

b) $\frac{(2x+3)^4}{8} + C$

c) $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{2}{3}}x) + C$

d) $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + C$

e) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

f) $-\ln(\cos(x)) + C$

2.2 Megoldás

a) $\frac{2}{15}$

b) $\frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{\sin^3(2x)}{3}\right) + C$

2.3 Megoldás

a) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $x\ln(x) - x + C$

c) $\frac{9}{13}e^{3x}\left(\frac{\sin(2x)}{3} - \frac{2}{9}\cos(2x)\right) + C$

d) $2\mathrm{arctg}(2) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(5/2)}{2}$

2.4 Megoldás

a) $\frac{3x^2}{2} + 5x + 5\ln(x-1) + C$

b) $-8\ln(x-2) + 11\ln(x-3) + C$

2.5 Megoldás

a) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

b) $\mathrm{arctg}(e^x) + C$

c) $\ln(\mathrm{tg}(x)) + C$

2.6 Megoldás

a) $s = \frac{2}{\pi}R$

b) $s = \frac{4}{3\pi}R$

3. A sík és tér vektorai

3.1. Feladatok

3.1. Feladat *Tekintsük a következő vektorokat:*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a)

$$\mathbf{ab} = ? \qquad , \mathbf{a} \times \mathbf{b} = ? \qquad , (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

b) *Határozzuk meg az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *vektorok* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *reciprok vektorait!*

c) *Fejtsük ki az* $\mathbf{r}$ *vektort az* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$*, illetve* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *bázisában!*

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.2. Feladat *Skaláris szorzás segítségével bizonyítsuk be a koszinusz tételt!*

3.3. Feladat *Igazoljuk, hogy a vektoriális szorzatokra teljesül az u.n. Jacobi-azonosság:*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0\,,$$

illetve az ezzel ekvivalens, Leibniz szabályra emlékeztető

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \quad \textit{összefüggés.}$$

3.4. Feladat *Vizsgáljuk meg az S sík és az e, f, g egyenesek kölcsönös helyzetét (metsző, párhuzamos, stb.) a közös pont kiszámítása nélkül!*

$$S : 3x + 2y + z = 4$$

$$e : 2x - 2 = \frac{3-y}{2} = -z \qquad f : \begin{array}{r} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{array} \qquad g : -5x + 10 = -5y + 5 = z + 4$$

3.5. Feladat *Adott két egyenes, e és f:*

$$e : \; -x + 3 = 2y + 1 = -z\,, \quad f : \begin{array}{r} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{array}$$

a) *Vizsgáljuk meg a két egyenes kölcsönös helyzetét!*

b) *Számítsuk ki a két egyenes által bezárt szöget!*

c) *Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az e egyenesen áthalad és párhuzamos f-fel!*

3.6. Feladat *Igazoljuk, hogy:*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\,.$$

3.7. Feladat *Adott* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *paraméterek mellett oldjuk meg az*

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \times (\mathbf{r} + \mathbf{b})$$

egyenletet $\mathbf{r}$*-re!*

Segítség:. *keressük* $\mathbf{r}$*-et* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *lineáris kombinációjaként!*

3.8. Feladat *Keressük meg azt az* $\mathbf{r}$ *vektort, amely teljesíti az alábbi feltételt és diszkutáljuk a megoldást:*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{b}$$

3.2. Megoldások

3.1 Megoldás

a) $\mathbf{ab} = 2 \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 4$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *bázis:* $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ -1 \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *bázis:* $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.2 Megoldás *Legyen* $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$*, ekkor* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$*-t kifejtve aazonnal adódik.*

3.3 Megoldás *A definíciókból, kihasználva az* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ *azonosságot, adódik.*

3.4 Megoldás *Legyen a sík normálvektora* $\mathbf{n}$*, az egyenesek irányvektora rendre* $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$*. Mivel* $\mathbf{ne} \neq 0$*,* e *metszi* S*-t.* $\mathbf{nf} = 0$*, de* f *tetszőleges pontja nem teljesíti* S *egyenletét,* f *párhuzamos* S*-sel. Hasonlóan* $\mathbf{ng} = 0$*, és* g *tetszőleges pontja teljesíti* S *egyenletét, így* g *benne van* S*-ben.*

3.5 Megoldás

a) *A két egyenes nem párhuzamos, és nincs közös pontjuk, tehát kitérőek.*

b) $65.9°$

c) $-\frac{3}{2}x - 3y = -3$

3.6 Megoldás *A definíciókból, kihasználva az* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ *azonosságot, adódik.*

3.7 Megoldás *Legyen* $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*, ekkor* $\alpha = \frac{\mathbf{ab}}{1+a^2}$*,* $\beta = -\frac{a}{1+a^2}$*,* $\gamma = \frac{1}{1+a^2}$*.*

3.8 Megoldás *Megoldás csak akkor létezik, ha* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$*, ekkor* $\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2}$*.*