Számítási Módszerek a Fizikában 1.
Beadandó házi feladatok

2014. ősz

1. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. szeptember 18.

1. A definícióval határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ függvény differenciálhányadosát az $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ pontban! (3p)

2. A deriválási szabályokkal határozza meg a következő függvények deriváltját!

   (a) $f(x) = \dfrac{\cos(x^3) + \sin^2(3x)}{\sqrt{2x^2 + 3}}$, (3p)

   (b) $g(x) = \big(2 + \sin(x)\big)^{\cos(x)}$. (3p)

3. Tekintsünk két ellentétes $+Q$ és $-Q$ töltést, melyek távolsága r. Ezt az elrendezést *elektromos dipólusnak* nevezzük abban a határesetben, ha $Q \to \infty$, $r \to 0$, miközben a $p = Qr$ *dipólmomentum* állandó. Mekkora és milyen irányú erővel hat a p dipólus a tőle x távolságra elhelyezett q töltésre, ha

   (a) a töltés a dipólus tengelyén van, a dipólus pozitív pólusához közelebb? (3p)

   (b) a töltés a dipóluson áthaladó, a dipólus tengelyére merőleges síkban van? (3p)

2. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. szeptember 25.

1. Határozza meg a következő integrálokat!

$$a)\quad \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = ? \qquad b)\quad \int \sin^3(x)\cos^4(x)\,dx = ?$$

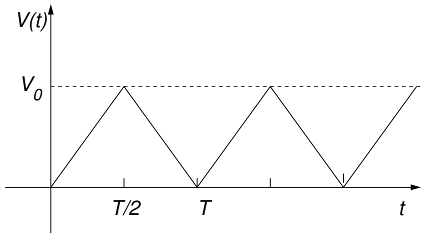
$$c)\quad \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+2e^x} = ? \qquad d)\quad \int (x^2+3x)e^{5x}\,dx = ?$$

$$e)\quad \int \frac{1}{x\ln x}\,dx = ?$$

(10p)

2. Határozzuk meg az ábrán látható háromszög jelnek az effektív értékét:

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)dt$$



A váltakozó feszültség effektív értékén azt az egyen feszültséget értjük, amelyet ugyanarra a terhelésre kapcsolva a terhelésen a váltakozó feszültség teljesítményével megegyező teljesítmény disszipálódik. (2p)

3. Egy l hosszúságú rúd lineáris sűrűségét a következő alakban adhatjuk meg: $\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{l}$. Lineáris sűrűségen az egységnyi hosszra eső tömeget értjük. Tehát a rúd tömege:

$$m = \int_0^l \rho(x)dx \ .$$

Hol van a rúd tömegközéppontja? (3p)

3. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. október 2.

1. Mutassa meg, hogy adott $\mathbf{m}$ vektor és c valós szám esetén az

$$\mathbf{r}^2 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = c$$

   egyenletnek eleget tevő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjai egy gömbön vannak. Hol van a gömb középpontja, mekkora a sugara? (5p)

2. Írja fel annak a síknak az egyenletét, mely áthalad az $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 3)$ és a $C(1, 0, -3)$ pontokon! Milyen távol esik az origó a síktól? (5p)

3. (a) Rajzolja le, hogyan helyezhető el egy szabályos tetraéder egy kockában!
   (b) Mekkora a szabályos tetraéder lapszöge?
   (c) Határozza meg a metán (CH_4) molekulában a $H - C - H$ kötési szöget! (5p)

4. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. október 9.

1. Igazolja, hogy a tér tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektoraira fennáll, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}.$$

   A számolást a kifejtési tétellel és indexesen is végezze el! (5p)

2. Írja fel az $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ tengely körül 60°-os szöggel forgató transzformáció mátrixát! (Forgassa be $\mathbf{n}$-et a z tengelybe!) (5p)

3. Két különböző tengely körüli térbeli forgatás művelete általában nem cserélhető fel. Határozza meg kis α, β szögekre, hogy (közelítőleg) milyen transzformációnak felel meg az

$$O_x^\alpha O_y^\beta - O_y^\beta O_x^\alpha$$

   lineáris leképezés! (Itt O_x^α az x tengely körüli α szögű, O_y^β pedig az y tengely körüli β szögű forgatás.) (5p)

5. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. október 16.

1. A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza tekinthető kétdimenziós valós vektortérnek is, ha az összeadást és a (valós) skalárral való szorzást a szokásos módon értelmezzük. A $\mathbb{C}$ halmaznak, mint valós vektortérnek a standard bázisa $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$. Egy rögzített $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén jelölje $M_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a z-vel való szorzást, tehát $M_z(w) = zw$.

   (a) Igazolja, hogy M_z lineáris transzformációja $\mathbb{C}$-nek, mint kétdimenziós valós vektortérnek!

   (b) Írja föl az M_z transzformáció mátrixát $\mathbb{C}$ standard bázisában! Jelölje ezt a mátrixot $[M_z]$.

   (c) Igazolja, hogy bármely két $z = x + iy$ és $w = u + iv$ komplex szám esetén
   $$[M_z][M_w] = [M_w][M_z] = [M_{zw}]$$
   (4p)

   Tanulság: a komplex számok reprezentálhatók az (1b) pontban megadott 2×2-es mátrixokkal, és a komplex számokon végzett műveletek a mátrixműveleteknek felelnek meg.

2. Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben legyen $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Adja meg az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ halmaz azon részhalmazait, melyek

   (a) lineárisan összefüggő rendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban;

   (b) generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban;

   (c) bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban!

   (4p)

3. Az $\mathbb{R}^2$ vektortéren melyik formula határoz meg belső szorzást?

   a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_y + a_y b_x$, *b)* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2a_x b_x + a_y b_y$,

   c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2a_x b_x - a_y b_y$.

   Válaszát minden esetben indokolja meg! (4p)

4. A háromdimenziós térben határozza meg a következő transzformációk magterét és képterét!

   (a) Adott $\mathbf{v}$ vektor esetén a $\mathbf{v}$-vel való vektoriális szorzás: $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

   (b) Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok esetén az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ transzformáció.

   Diszkutálja azokat az eseteket is, amikor az adott vektor(ok) nullvektor(ok)! (3p)

6. Házi feladat Beadási határidő: 2014. október 22. (SZERDA!!!).

1. Határozza meg, hogy milyen paraméterérték mellett létezik a következő mátrixnak inverze, és adja meg a mátrix inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta - 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5p)

2. Határozza meg a következő determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = ?$$

(5p)

3. Mi az alábbi polinomban x^3 együtthatója?

$$\begin{vmatrix} 3x & 5 & 7 & 1 \\ 2x^2 & 5x & 6 & 2 \\ 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

(5p)

7. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. október 30.

1. Egy mátrixot *permutációmátrixnak* hívunk, ha minden oszlopában és sorában pontosan egy 1-es elem áll, a többi 0. Ha $\sigma : \{1, 2 \ldots n\} \to \{1, 2 \ldots n\}$ egy permutáció, akkor a hozzá tartozó $P(\sigma)$ permutációmátrix elemei: $P(\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. (Tehát a j oszlop $\sigma(j)$ sorában áll 1-es.)

   (a) Ha σ permutáció, $\det P(\sigma) =?$

   (b) Ha σ és μ két permutáció, $P(\sigma)P(\mu) =?$

   (c) Adja meg egy $\mathbf{v} = [v_1, v_2 \ldots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén a $P(\sigma)\mathbf{v}$ vektor komponenseit! Az eredményt szavakban (is) fogalmazza meg!

   (d) Hogyan rendezi át egy $A \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix elemeit a $P(\sigma)$ mátrixszal való balról illetve jobbról szorzás? Az eredményt szavakban (is) fogalmazza meg!

   (e) Hogyan kapható meg egy $A \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix transzponáltja permutciómátrix(ok)kal való szorzással?

(5p)

2. Fejtse ki a következő $n \times n$-es determinánst!

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{vmatrix} =?$$

(5p)

3. Adja meg a következő egyenletrendszer összes megoldását! (Gauss kiküszöböléssel dolgozzon!)

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta - 2\gamma \qquad &= -1 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta &= 8 \\ 2\alpha + 3\beta - 4\gamma - \delta &= 9 \\ \alpha + \beta - 2\gamma - 3\delta &= -4 \\ 3\alpha - 2\beta - 6\gamma + \delta &= 8 \end{aligned}$$

(5p)

8. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. november 6.

1. Legyen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{V})$, $\dim \mathbb{V} = n$, $1 \leq n < \infty$. Adjon *éles* alsó és felső becslést $\operatorname{rank} \mathbf{A}$, $\operatorname{rank} \mathbf{B}$ és n segítségével

   (a) $\operatorname{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$-re;

   (b) $\operatorname{rank}(\mathbf{AB})$-re!

   (8p)

2. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban $\mathcal{E} : \{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)}\}$ a standard bázis, és $\mathcal{F} : \{\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{f}^{(3)}\}$ az

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   vektorokból álló bázis. Határozza meg az $\mathcal{E}$ bázisban az

$$A^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   mátrix-szal adott lineáris transzformáció $A^{\mathcal{F}}$ mátrixát az $\mathcal{F}$ bázisban! (7p)

9. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. november 13.

1. Legyen $\mathbf{V}$ a síkon az $y = x$ 45°-os egyenes mentén az x-tengelyre való ferde vetítés.

   (a) Írja föl a standard ortonormált bázisban a transzformáció $[\mathbf{V}]$ mátrixát!

   (b) Írja föl a mátrix $[\mathbf{V}]^*$ adjungáltját!

   (c) Adja meg szavakban a $\mathbf{V}^*$ adjungált transzformáció hatását a síkon!

   (5p)

2. Határozza meg az
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Normális mátrix-e A? (5p)

3. Határozza meg a következő normális mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, spektrális projekcióit és spektrálfelbontását!
$$N = \begin{bmatrix} -2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
(5p)

10. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. november 20.

1. Határozza meg az
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
egyenletű ellipszis görbületét a tengelymetszetekben, azaz a $(\pm a, 0)$ és a $(0, \pm b)$ pontokban az a és b féltengelyek ismeretében!

   Útmutatás: Írja föl az ellipszis egyenletét paraméteresen és használja a tanult képleteket. (6p)

2. Egy paraméteres térgörbe sebességvektorát az
$$\mathbf{r}'(s) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\omega s) \\ \cos(\alpha)\sin(\omega s) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$
formula határozza meg, ahol α és ω adott valós paraméterek.

   (a) Igazolja, hogy a görbe ívhossz szerint van paraméterezve!

   (b) Adja meg a görbe $\mathbf{r}(s)$ paraméteres egyenletét! Milyen görbéről van szó? A görbét jellemző számszerű paramétereket is adja meg α és ω függvényeként!

   (c) Határozza meg a görbe $G(s)$ görbületét valamint $T(s)$ torzióját! (9p)

11. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. november 27.

1. Legyen

$$O = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & a & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & b \\ c & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Határozza meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy O ortogonális legyen! A továbbiakban használja ezeket az értékeket!

   (b) Legyen $N = ODO^*$. Igazolja, hogy az N mátrix önadjungált!

   (c) Határozza meg az N mátrix sajátértékeit, sajátvektorait valamint spektrális projekcióit!

   (A feladat megoldásához *nem* kell kiszámolni N-et.) (6p)

2. Legyen

$$\Phi(x, y, z) = x^2yz + e^{yz} + \frac{xy}{z^2+1} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Határozza meg $\operatorname{grad} \phi(x, y, z)$-t egy tetszőleges (x, y, z) pontban! (Feltehetjük, hogy létezik.)

   (b) Határozza meg a $\left.\frac{d\phi}{d\mathbf{v}}\right|_{(1,1,0)}$ iránymenti deriváltat az $(1, 1, 0)$ pontban!

   (c) Határozza meg $\Phi(x, y, z)$ összes másodrendű parciális deriváltját egy általános (x, y, z) pontban!

   (9p)

12. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. december 4.

1.
$$f(x,y) = xye^{x+2y}$$

(a) Határozza meg f első- és másodrendű parciális deriváltjait!

(b) Írja fel f-nek a $(0,0)$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

(c) Írja fel f-nek az $(1,2)$ pontban a másodrendű deriválttenzorát (Hesse-mátrixát)!

(7p)

2.
$$f(\mathbf{r}) = (xy+2yz)^2, \qquad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x+2y \\ yz \\ (y+z)^2 \end{bmatrix}, \qquad \text{ahol } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Határozza meg a következő skalár- illetve vektormezőket:

$a)\quad \operatorname{grad} f = ?,\quad b)\quad \triangle f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = ?,\quad c)\quad \operatorname{div}\mathbf{v} = ?,\quad d)\quad \operatorname{rot}\mathbf{v} = ?$

(8p)

13. Házi feladat
Beadási határidő: 2014. december 11.

1. Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ tetszőleges folytonosan deriválható vektormező. Indexes számolással igazolja a következőket:

$$\begin{aligned}
&a) && \operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v};\\
&b) && \operatorname{grad}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) = (D\mathbf{v})^T\mathbf{r} + \mathbf{v};\\
&c) && \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) = (D\mathbf{v})\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v} + 2\mathbf{v};\\
&d) && \triangle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cdot\triangle\mathbf{v} + 2\operatorname{div}\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

(8p)

2. Az integrálás sorrendjének felcserélésével határozza meg a következő integrál értékét!

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=\sqrt{y}}^{1}\sqrt{4+x^3}\,dx\right)dy = ?$$

(7p)