9. Gyak.-anyag

Adjungálás

1, $M_n(\mathbb{C})$-ben altér-e, (rész)csoport-e, (rész)algebra-e?

i, az önadjungált mátrixok halmaza; (valós altér, nem részcsop., valós részalg.)

ii, az unitér mátrixok halmaza; (nem altér, részcsop.; nem részalg.)

iii, a normális mátrixok halmaza; (egyik sem)

iv, adott $A = A^* \in M_n(\mathbb{C})$-vel kommutáló mátrixok halmaza?
(altér, nem részcsop., részalgebra.)

2, Legyen $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ komplex euklideszi tér, $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{V}$.
Ekkor $\underline{a} \circ \underline{b} = |\underline{a}\rangle\langle\underline{b}| \in \mathrm{Lin}\,\mathbb{V}$. Mi ennek az adjungáltja?

régi jelölés ; új jelölés

3, Legyen $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ háromdimenziós euklideszi tér, $\underline{v} \in \mathbb{V}$.
$\underline{\underline{B}}_v : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\underline{x} \mapsto \underline{v} \times \underline{x} = \underline{\underline{B}}_v(\underline{x})$ lineáris transzformáció.
($\underline{v}$-vel való kereszt-szorzás). Határozzuk meg $\underline{\underline{B}}_v^*$-ot!

4, Legyen $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ valós vagy komplex euklideszi tér. Igazoljuk, hogy az ($\underline{\underline{P}} \in \mathrm{Lin}\,\mathbb{V}$) ortogonális projekciót követő két jellemzése ekvivalens:

i, (Geometriai jellemzés) $\underline{\underline{P}}$ ort. proj., ha $\mathrm{Ker}\,\underline{\underline{P}} \perp \mathrm{Ran}\,\underline{\underline{P}}$, és $\forall\, \underline{v} \in \mathrm{Ran}\,\underline{\underline{P}}$ esetén $\underline{\underline{P}}\,\underline{v} = \underline{v}$.

ii, (Algebrai jellemzés) $\underline{\underline{P}}$ ort. proj., ha $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^* = \underline{\underline{P}}^2$.

(tehát $\dim \mathbb{V} < \infty$)

5, Legyen $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ komplex euklideszi tér. Definiáljunk 3 halmazt:

$$\mathcal{U}_1 := \{ \underline{\underline{U}} \in \mathrm{Lin}\, \mathbb{V} \mid \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V} : \langle \underline{\underline{U}}\underline{x}, \underline{\underline{U}}\underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \}$$

/belső szorzattartó leképezések/

$$\mathcal{U}_2 := \{ \underline{\underline{U}} \in \mathrm{Lin}\, \mathbb{V} \mid \forall \underline{x} \in \mathbb{V} : \|\underline{x}\| = \|\underline{\underline{U}}\underline{x}\| \} \quad (*)$$

/Normatartó leképezések/

$$\mathcal{U}_3 := \{ \underline{\underline{U}} \in \mathrm{Lin}\, \mathbb{V} \mid \underline{\underline{U}} \text{ invertálható és } \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^* \}$$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3$. /unitér leképezések halmaza/

—o—

6, Mondjunk ki hasonló tételt egy valós euklideszi tér ortogonális transzformációira!

Útmutatás: Világos, hogy ha $\underline{\underline{U}} \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow \underline{\underline{U}} \in \mathcal{U}_2$. Visszafelé, tehát $\underline{\underline{U}} \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow \underline{\underline{U}} \in \mathcal{U}_1$ a polarizációs azonosságból következik.

Valósban: $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$

Komplexben: $\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 = \ldots$

Elég csak a valós eset.

Sajátérték, sajátvektor, spektrál felbontás, normális mátrix függvénye

1, Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, saját vektorait, és spektrális projekcióit, spektrál felbontását:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

— ◦ —

2,

$$A := \frac{\pi}{12} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

Sajátértékek? Sajátvektorok? Spektrálfelbontás?

$\arcsin \underline{\underline{A}} = ?$

$\left(\lambda_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{12}; \lambda_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{12}; \lambda_3 = 6 \cdot \frac{\pi}{12} \right)$

— ◦ —

3,

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix};$$

A spektrálfelbontása?

$e^A = ?$