8. Gyak. anyag

(Gauss-elimináció alkalmazásai

1,(!) Az $[A \mid I] \xrightarrow[\text{elim}]{\text{Gauss}} [I \mid A^{-1}]$ sémát alkalmazva határozzuk meg a következő mátrixok inverzét!

a, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; c, $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -7 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \leftarrow (\nexists)$; d, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hogyan vesszük észre, ha a mátrix inverze nem létezik?

2,(!) Gauss-eliminációt alkalmazva határozzuk meg a következő mátrixok rangját:

a, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2); b, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (3); c, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{bmatrix}$ (1)

3, Mennyi egy olyan mátrix rangja, amelynek minden sorában különböző (és nem nulla) hányadosú mértani sorozat áll? (Vandermonde determináns tulajdonságait használhatjuk.)

4,(!) Igazoljuk, hogy egy ($k \times n$ méretű) A mátrix rangja pontosan akkor 1, ha diád, azaz $A_{ij} = b_i \cdot c_j$, ahol $\underline{b} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$!

5, $[A\,|\,I] \xrightarrow[\text{elim.}]{\text{Gauss}} [I\,|\,A^{-1}]$ módon határozzuk meg a következő $n\times n$-es mátrix inverzét!

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Minden elem 1-es, kivéve a főátló 2.–n. elemeit, amik 2-k.)

— ∘ —

6, Döntsük el, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek-e! (Használjuk most is Gauss-eliminációt!)

a,(!) $\begin{bmatrix}1\\3\\2\\5\end{bmatrix};\begin{bmatrix}3\\1\\4\\-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-1\\5\\0\\11\end{bmatrix}$ (nem)

b, $\begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix};\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ (igen)

c, $\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\-3\\1\\-1\end{bmatrix}$ (nem)

— ∘ —

Bázistranszformáció

1, Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós polinomok vektortere, $D: V \to V$ pedig a deriválás. Írjuk fel D mátrixát a következő bázisokban:

a,(!) $\{1;\ x;\ x^2\}$ b,(!) $\{1+x;\ x+x^2;\ x^2+1\}$; c, $\{x^2+1;\ -2x^2+2x;\ x^2-1\}$

d, $\{x^2+x+1;\ 2x+1;\ -x^2-x+1\}$

2, Az előző feladat jelöléseit használjuk. Van-e olyan bázis, melyben

i, D diagonális

ii, $[D]_{ij}=0$, ha $j \le i$ $\left([D]=\begin{bmatrix}0 & \times & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$

iii, $[D]=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ alakú? (Adjunk is meg egy-egy „jó" bázist!)

3,(!) Adjuk meg a sík α-szögű forgatásának mátrixát a

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ bázisban!

4,(!) Az $\underline{\underline{A}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineáris transzformáció esetén mely mennyiségek függetlenek a $\mathcal{B}$ bázistól?

i, $[\underline{\underline{A}}]^{\mathcal{B}}_{1,2}$ (1,2 mátrixelem)

ii, $\det [\underline{\underline{A}}]^{\mathcal{B}}$

iii, $\mathrm{Tr}\, [\underline{\underline{A}}]^{\mathcal{B}}$

iv, $[\underline{\underline{A}}]^{\mathcal{B}}$ mátrix rangja

v, $\det [\underline{\underline{A}}^{-1}]^{\mathcal{B}}$, ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható

vi, $\mathrm{Tr}\, [\underline{\underline{A}}^{-1}]^{\mathcal{B}}$, —— " —— – " –

(Állításainkat bizonyítsuk be!)

— o —

5, Melyek azok az $\underline{\underline{A}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transzformációk, melyek mátrixa minden bázisban azonos?