$\boxed{\text{5. Gyak. anyag}}$

3, Lineáris algebra alapjai

3.1. Alapfogalmak vektorterekhez

(Vektortér, altér, generátorrendszer, lineárisan független rendszer, bázis, dimenzió, koordináták)

1, Vektorteret alkotnak-e?

a, 100-adfokú polinomok (pontonkénti műveletekkel)

b, legfeljebb 100-adfokú polinomok

c, Összes páros fokú polinom

d, X^2 összes polinomja

e, függvények ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), melyekre $f(0)=1$ (pontonkénti műveletekkel)

f, — " — — " — $f(0)=0$

g, — " — — " — $f(0)=2f(1)$

h, korlátos sorozatok

i, konvergens sorozatok

j, zéró sorozatok

k, sorozatok, melyekre $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$

l, Véges sok nem nulla elemet tartalmazó sorozatok

m, monoton növő sorozatok

n, monoton sorozatok

—o—

2, Vizsgáljuk meg, hogy az előző feladat h – n pontjaiban definiált halmazok között milyen altér-kapcsolatok vannak!

3, Alteret alkotnak-e $M_n(\mathbb{R})$-ben?

a, Egy adott $\underline{\underline{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrixszal kommutáló mátrixok?

b, $\{ \underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = 0 \}$ ($\underline{\underline{B}}$ adott)

c, $\{ \underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underline{\underline{A}}^2 = 0 \}$

— o —

4, Bizonyítsuk be, hogy egy vektortérben akárhány altér metszete is altér!

5, Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy két altér egyesítése (uniója) altér legyen!

6, Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben?

a, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ (nem)

b, $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (nem)

c, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\9\\27\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\16\\64\end{bmatrix}$ (igen)

7, A polinomok (valós...) vektorterében melyik tartalmazás igaz?

a, $x^3 + 7x^2 + 5x \in \langle x^3 + 2x,\ 3x^3 + 4x,\ 5x^2 + 6x \rangle$ (igen)

b, $x^3 + 7x^2 + 5 \in$ ———— " ———— (nem)

c, $x - 1 \in \langle x^3 - x,\ x^3 - x^2,\ x^3 - 1,\ 2x^2 - 3x + 1 \rangle$ (igen)

8, Tegyük fel, hogy egy V vektortér $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$. Igazoljuk, hogy ekkor $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$!

9, Generátorrendszert alkotnak-e az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvények terében a polinomok?

10, Lineárisan összefüggő rendszer-e?

a, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin(2x)$ ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények vektorterében)

b, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos(2x)$

11, A 6. feladatban szereplő vektorrendszerből válasszunk ki többféleképpen lineárisan független rendszereket
maximális elemszámú

12, Belső szorzatot ad-e meg?

a, A polinomok terén $p\cdot q := p(1)\cdot q(1)$

b, — " — $p\cdot q := \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$

c, A legfeljebb másodfokú polinomok terén

$$p\cdot q = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$$

d, ~~a polinomok terén~~ $\cancel{p\cdot q = p'^2}$

A legfeljebb harmadfokú polinomok terén milyen n-re lesz skaláris szorzat a

$$p\cdot q = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(0)\cdot q^{(k)}(0)$$