Számítási módszerek a fizikában 1. 2014/15/1. félév

$\boxed{\text{1. Gyak. anyag}}$

1. Egyváltozós függvények kalkulusa

1.1 Deriválás

1, A definíció alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltját az adott x_0 pontban!

a, $f(x) = 2x+3$; $x_0 = 5$ b, $f(x) = \sqrt{2x+5}$; $x_0 = 2$

c, $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$; $x_0 = 1$ d, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}$; $x_0 = 4$

e, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $x_0 = 2$ f, $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}$ sin $(x-2)$ $x_0 = 2$

2, A definícióval határozd meg a következő függvények deriváltját egy általános pontban!

a, $f(x) = x$; b, $f(x) = |x|$; c, $f(x) = x^2$

d, $f(x) = x^3$; e, $f(x) = \frac{1}{x}$; f, $f(x) = \sqrt{x}$

g, $f(x) = x^{-1/2}$; h, $f(x) = \frac{1}{x^2}$; i, $f(x) = \sin x$

j, $f(x) = \cos x$; k, $f(x) = e^x$;

/ Bizonyítás nélkül felhasználhatjuk, hogy

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ /

3, A deriválási szabályok segítségével határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

e^{3x+2}; $\sin(x^2+3x+4)$; $(2x+3)\cos(x^3+3)$;

$\dfrac{x^2+3x-6}{2x^2+7}$; $(x^2+1)\sqrt{1+2x^3}$; $\dfrac{x^3+3x}{\sqrt{2x^6+3}}$;

$\sin^3(3x^2+6)$; $\cos\left(\sqrt{2x^2+5}\right)$; $(x^2+e^{3x+2})^3$; stb...

3^{2x+4}; $\ln(2x^2+3)$; $\lg(\sin(3x+2)+2)$; $\dfrac{1}{\cos(3x^2+5)}$;

$\mathrm{tg}\,x$; $\mathrm{ctg}\,x$; x^x; $(2x^2+3)^{\sin(5x+2)}$

4, Határozzuk meg a következő Taylor-polinomokat!

a, $\sin(2x)$; $x_0=0$; $T_3(x)=?$

b, $\ln(1+x)$; $x_0=0$; $T_3(x)=?$

c, $\mathrm{tg}(x)$; $x_0=\frac{\pi}{4}$; $T_2(x)=?$

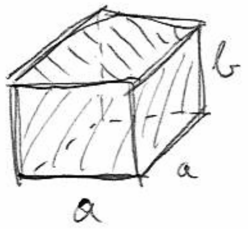
d, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; $x_0=0$; $T_3(x)=?$

5, Az inverz-függvény deriválási szabályával határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

a, $\arcsin' x=?$; b, $\arccos' x=?$; c, $\mathrm{arctg}' x=?$

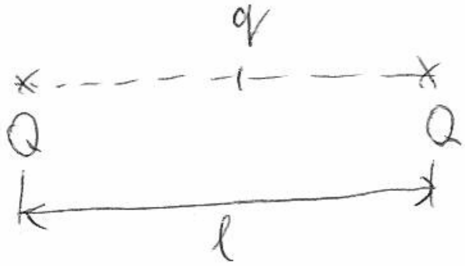
d, $\ln' x=?$; e, $\mathrm{arsh}' x=?$; f, $\mathrm{arch}' x=?$

6,



Hogyan válasszuk meg az ábrán látható, felül nyitott, négyzetes hasáb alakú doboz oldaléleit, hogy a doboz térfogata $V = 1\,m^3$ legyen, tömege pedig a lehető legkisebb? A dobozt vékony, állandó vastagságú, homogén lemezből készítjük.

7,



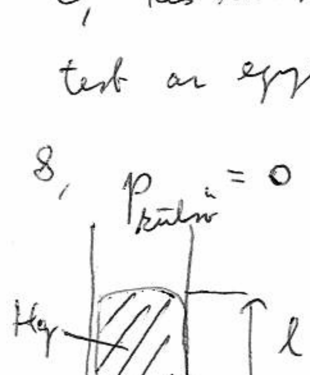
Két rögzített, egymástól l távolságra levő $Q > 0$ töltés között, a töltések egyenesén szabadon mozoghat egy m tömegű, $q > 0$ töltésű test.

a, Hol van a test egyensúlyban?

b, Stabil-e az egyensúly?

c, Kis kitérés esetén mekkora körfrekvenciával rezeg a kis test az egyensúlyi helyzet körül?

8,



Függőleges kémcsőben x_0 hosszúságú levegőoszlopot l hosszúságú higanyoszloppal zárunk el. A külső nyomás elhanyagolhatóan kicsiny.

a, Hogyan változik a higanydugóra ható eredő erő, ha azt egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítjük? (ρ_{Hg} adott.)

b, Mekkora körfrekvenciájú kis rezgéseket végez a higanycsepp egyensúlyi helyzete körül?

(A súrlódást hanyagoljuk el! A feladatot oldjuk meg izoterm és adiabatikus közelítéssel is!)