Matematikai segédlet

Takács Gábor

2015. december 5.

1. Legendre-polinomok

A Legendre-féle differenciálegyenlet

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx}+\nu(\nu+1)P=0 \tag{1}$$

1.1. Megoldás hatványsor alakban

Mivel az egyenlet másodrendű, két lineárisan független megoldása létezik.

Keressük a $[-1,1]$ intervallumon reguláris megoldásokat a következő alakban:

$$P(x)=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

Behelyettesítve:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_nx^{\alpha+n-2}-[(\alpha+n)(\alpha+n+1)-\nu(\nu+1)]\right\}c_nx^{\alpha+n}=0$$

Együtthatók:

$$\begin{aligned}
x^{\alpha-2}\quad &:\quad \alpha(\alpha-1)c_0=0\\
x^{\alpha-1}\quad &:\quad \alpha(\alpha+1)c_1=0\\
x^{\alpha+j}\quad &:\quad (\alpha+j+2)(\alpha+j+1)c_{j+2}=[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-\nu(\nu+1)]c_j \qquad j\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ezért

$$c_{j+2}=\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1)-\nu(\nu+1)}{(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)}c_j$$

és vagy csak páros, vagy csak páratlan hatványok fordulnak elő. Két eset van:

$$\begin{aligned}
c_0\neq 0: &\qquad \alpha=0 \qquad \text{vagy} \qquad \alpha=1\\
c_1\neq 0: &\qquad \alpha=0 \qquad \text{vagy} \qquad \alpha=-1
\end{aligned}$$

A második lehetőség mind a két esetben paritást vált, a független esetek tehát az $\alpha=0$ választással előállnak:

$$c_{j+2}=\frac{j(j+1)-\nu(\nu+1)}{(j+2)(j+1)}c_j \tag{2}$$

Mivel

$$\frac{c_{j+2}}{c_j}\to 1 \qquad \text{ha} \qquad j\to\infty$$

mindkét sor divergál $x = -1$-ben, kivéve, ha véges sok tag után terminálnak. Ez akkor lehetséges, ha $\nu = l \in \mathbb{N}$ és ekkor l paritásától függően a páros vagy a páratlan sor terminál. Ezt a megoldást a következőképpen normáljuk:

$$P(1) = 1$$

és l-edfokú Legendre polinomnak nevezzük, jele

$$P_l(x)$$

Megjegyzés: az (r, θ, ϕ) gömbi koordinátákban felírt Laplace-egyenlet megoldásakor az x jelentése

$$x = \cos\theta$$

Az $x = \pm 1$ pontokbeli regularitás megkövetelése azt jelenti, hogy a megoldási tartomány a θ polárszögben a teljes $[0, \pi]$ intervallum. Amennyiben ez nem követelmény (pl. a csúcshatás tárgyalásánál), megengedhető, hogy l tetszőleges valós szám legyen, valamint ha egyik pontban sem szükséges a regularitás, akkor mindkét lineárisan független megoldás szóba jöhet (ilyenkor a megoldások nem polinomok).

Az l paraméter analitikusan akár a komplex síkra is kiterjeszthető. Mivel az egyenletnek

$$l \to -l - 1$$

szimmetriája, ezért az l paraméter fundamentális tartománya

$$\Re \mathrm{e} l \geq -\frac{1}{2}$$

1.2. Ortogonalitás

A Legendre polinomok ortogonálisak:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{1} dx P_{l'}(x) \left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_l(x) \right) \\ &= \int_{-1}^{1} dx \left(-\frac{dP_{l'}(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{1} dx \left(-\frac{dP_{l'}(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right) \\ &- \int_{-1}^{1} dx \left(-\frac{dP_l(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_{l'}(x)}{dx} + l'(l'+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right) \\ &= [l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^{1} dx P_{l'} P_l \end{aligned}$$

azaz

$$\int_{-1}^{1} dx P_{l'}(x) P_l(x) = 0 \qquad l \neq l'$$

Mivel minden x^n hatvány előáll a Legendre polinomok lineáris kombinációjaként, ezért egyben teljes függvényrendszert is alkotnak. Ráadásul mivel az x^n hatványt nála nem nagyobb fokú Legendre-polinomokkal lehet kifejezni, ezért

$$\int_{-1}^{1} dx x^n P_l(x) = 0 \qquad l > n$$

azaz a Legendre-polinomok pont az elemi hatványokból Gram-Schmidt ortogonalizációval képzett bázis a $[-1,1]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében. Normáljuk ezeket a függvényeket a

$$P_l(1)=1$$

feltétellel.

1.3. Rodrigues formula

A fentiekből következik a Rodrigues formula:

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

Bizonyítás: először is l-szeres parciális integrálással

$$\int_{-1}^{+1} dx x^n \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l=0 \qquad l>n$$

tehát mindenképpen igaz, hogy

$$P_l(x)\propto\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

mivel utóbbi egy l-edfokú polinom, ami minden nála kisebb fokszámú polinomra ortogonális a $[-1,1]$ intervallumon. Explicit számítással ellenőrizhető, hogy

$$\left.\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\right|_{x=1}=1$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\left.\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\right|_{x=1} &= \left.\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x-1)^l(x+1)^l\right|_{x=1}\\ &= \left.\frac{1}{2^l l!}\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}\frac{d^{l-n}}{dx^{l-n}}(x-1)^l\frac{d^n}{dx^n}(x+1)^l\right|_{x=1}\end{aligned}$$

Ebből csak az $n=0$ tag ad járulékot $x=1$-nél, azaz

$$\begin{aligned}\left.\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\right|_{x=1} &= \left.\frac{1}{2^l l!}(x+1)^l\frac{d^l}{dx^l}(x-1)^l\right|_{x=1}\\ &= \left.\frac{1}{2^l l!}(x+1)^l l!\right|_{x=1}\\ &= 1\end{aligned}$$

1.4. Generátorfüggvény

A Laplace-egyenlet általános megoldása azimutális szimmetria esetén

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+B_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

A

$$G(\underline{x},\underline{x}')=\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

is megoldja a Laplace egyenletet ha $\underline{x} \neq \underline{x}'$:

$$\Delta_x \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = 0$$

Legyen $\underline{x}' = \underline{e}_z$ és $|\underline{x}| = r < 1$, ekkor az $r = 0$-ban vett regularitás miatt $B_l = 0$ és

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{e}_z|} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l x^l P_l(\cos\theta)$$

azaz $t = \cos\theta$ jelöléssel

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(t)$$

és a $t = 1$ pontban

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \qquad \Rightarrow \qquad A_l = 1$$

Átjelölve a változókat, ezzel beláttuk, hogy a Legendre polinomok generátorfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

1.5. Normálás

Most már csak

$$N_l = \int_{-1}^{1} dx P_l(x)^2$$

kell. Induljunk ki a generátorfüggvényből:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}\right)^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^k t^l P_l(x) P_k(x)$$

Mindkét oldalt integrálva

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^{2k}$$

Elemi integrálással

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \frac{1}{t} \log \frac{1+t}{1-t}$$

Felhasználva. hogy

$$\begin{aligned} \log(1-t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \\ \log(1+t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \end{aligned}$$

adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_k t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} t^{2k}$$

azaz a Legendre-polinomok teljes ortogonalitási relációja

$$\int_{-1}^{1} dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

1.6. Függvények kifejtése

Legyen f egy a $[-1, 1]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvény. Ekkor

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

ahol

$$c_l = \frac{2}{2l+1} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x) f(x)$$

2. Asszociált Legendre függvények

Az asszociált Legendre-egyenlet

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P = 0 \tag{3}$$

ahol kihasználva az egyenlet szimmetriáját a

$$\nu \to -\nu - 1$$

transzformációra, legyen $\nu \geq -\frac{1}{2}$.

2.1. Szinguláris pontok

Ennek az egyenletnek $x = \pm 1$ szinguláris pontjai. Átírva a változót

$$x = 1 - \xi$$

$$\xi(2-\xi)\frac{d}{d\xi}\xi(2-\xi)\frac{dP}{d\xi} + \left[\nu(\nu+1)\xi(2-\xi) - m^2\right] P = 0$$

és a megoldást

$$P(x) = \xi^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$$

alakban keresve

$$\alpha = \pm \frac{m}{2}$$

adódik. Ebből csak a pozitív előjel elfogadható a regularitás miatt. Ezek szerint

$$P(x) \propto (1-x)^{m/2}$$

ha $x \sim 1$. Ugyanez a gondolatmenet

$$x = -1 + \xi$$

helyettesítéssel azt adja, hogy

$$P(x) \propto (1+x)^{m/2}$$

ha $x \sim -1$.

2.2. Ansatz és rekurzió

Ezért keressük a megoldást a következő alakban:

$$P(x) = (1 - x^2)^{m/2} p(x) \tag{4}$$

Legyen $m > 0$ és fejtsük ki a p függvényt:

$$p(x) = \sum_n c_n x^n$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_n \left[n(n-1)x^{n-2} - (m(m+1) + (n+m)^2 - \nu(\nu+1))x^n \right] c_n = 0$$

azaz

$$c_{n+2} = \frac{(m(m+1) + (n+m)^2 - \nu(\nu+1))}{(n+1)(n+2)} c_n$$

Ez a rekurzió $m = 0$-ra visszaadja (2)-t, ahogy ez el is várható. Megint van egy páros és egy páratlan megoldás, amelyek egymástól függetlenek.

A regularitáshoz $x = \pm 1$-ben megint az kell, hogy a sor terminálódjon; ez akkor történik meg, ha a fenti rekurzióban a számláló 0, ami két esetben lehetséges:

$$\begin{aligned} n &= -1 - m - \nu \\ n &= \nu - m \end{aligned}$$

Ekkor a második lehetőség vezethet termináláshoz, amihez az kell, hogy

$$\nu = l \in \mathbb{N} \qquad \text{és} \qquad m \leq l$$

Ekkor a megfelelő paritású hatványokból álló $p(x)$ egy $l - m$-ed fokú polinom.

2.3. Megoldás előállítása a Legendre-polinomokkal

Explicit behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

megoldja az asszociált Legendre-egyenletet.

Bizonyítás: differenciáljuk le a Legendre-egyenletet m-szer

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{dP}{dx} + l(l+1)P \right) \\ = & \frac{d^m}{dx^m} \left((1 - x^2)\frac{d^2 P}{d^2 x} - 2x\frac{dP}{dx} + l(l+1)P \right) \\ = & (1 - x^2)\frac{d^{2+m} P}{d^{2+m} x} - 2mx\frac{d^{1+m} P}{d^{1+m} x} - m(m-1)\frac{d^m P}{d^m x} \\ & -2x\frac{d^{1+m} P}{d^{1+m} x} - 2mx\frac{d^m P}{d^m x} + l(l+1)\frac{d^m P}{d^m x} \end{aligned}$$

azaz $p_l^{(m)}(x) = \frac{d^m P_l}{d^m x}$ (ami egy $l - m$-edfokú polinom) megoldja az

$$(1 - x^2)\frac{d^2 p_l^{(m)}(x)}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dp_l^{(m)}(x)}{dx} + \left[l(l+1) - m(m+1) \right] p_l^{(m)}(x) = 0$$

egyenletet.

Másfelől a (4) Ansatzot az asszociált Legendre-egyenletbe helyettesítve az adódik, hogy az ott szereplő $p(x)$ függvény megoldja az

$$(1-x^2)\frac{d^2p(x)}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dp(x)}{dx} + [l(l+1) - m(m+1)]\, p(x) = 0 \tag{5}$$

egyenletet. Ebből következik, hogy (a normálást egynek választva)

$$p(x) = p_l^{(m)}(x) = \frac{d^m P_l}{d^m x}$$

hiszen a rekurzió szerint a (5) egyenletnek normálás erejéig egyetlen olyan megoldása van, ami $l-m$-edfokú polinom.

2.4. Kiterjesztés $m < 0$-ra

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

Ez kiterjeszthető arra az esetre, ha $-l \le m \le l$. Azonban mivel (3) csak m^2-et tartalmazza, $P_l^m(x)$ és $P_l^{-m}(x)$ ugyanazt az asszociált Legendre-egyenletet oldja meg, aminek tudjuk, hogy normálás erejéig csak egy véges fokú polinom megoldása van. Ezért ez a két függvény nem lehet független egymástól; köztük fennáll a

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

reláció.

Bizonyítás: mivel nem lehetnek függetlenek, ezért

$$P_l^{-m}(x) = c_{lm}P_l^m(x)$$

és csak c_{lm} értéke a kérdéses. Ez az egyenlet kiírva

$$(1-x^2)^{-m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l = c_{lm}(1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

azaz

$$\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l = c_{lm}(1-x^2)^m\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

A két oldalon a legmagasabb fokú tag együtthatója meg kell egyezzen:

$$\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2)^l = c_{lm}(-x^2)^m\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2)^l$$

és itt már explicite el tudjuk végezni a deriválást:

$$2l(2l-1)\dots(l+m+1)x^{l+m} = c_{lm}(-1)^m 2l(2l-1)\dots(l-m+1)x^{l+m}$$

azaz

$$\frac{(2l)!}{(l+m)!} = c_{lm}(-1)^m\frac{(2l)!}{(l-m)!}$$

amiből az állítás következik.

2.5. Az asszociált Legendre-függvények alapvető tulajdonságai

1. $P_l^{m=0}(x) = P_l(x)$

2. $P_l^m(x) = 0$, $m > l$. Ez egyszerűen következik abból, hogy

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

és egy $2l$-edfokú polinom $2l$-nél magasabb deriváltja nulla.

3. Ortogonalitás

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0$$

ha $l \neq l'$. A bizonyítás ugyanúgy megy, ahogy a P_l Legendre polinomoknál láttuk.

4. Normálás

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

Bizonyítás:

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x)$$

Ezt beírjuk az integrál alá

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_l^m(x) \\ = \quad & (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l \frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \end{aligned}$$

Most m-szer parciálisan integrálunk, a kiintegrált rész a határon mindig 0:

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \\ = \quad & \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} dx P_l(x)^2 \\ = \quad & \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \end{aligned}$$

Ennek következménye

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}$$

3. Gömbfüggvények

3.1. Definíció

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

3.2. Ortonormáltság

$$\int d\Omega Y_{lm}(\theta,\phi)^* Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Bizonyítás:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = d(\cos\theta)d\phi$$

azaz

$$\begin{aligned}
&\int d\Omega Y_{lm}(\theta,\phi)^* Y_{l'm'}(\theta,\phi) \\
= &\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}}\int_{-1}^{1} dx P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m-m')\phi}
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m-m')\phi} = 2\pi\delta_{mm'}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int d\Omega Y_{lm}(\theta,\phi)^* Y_{l'm'}(\theta,\phi) \\
= &\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-m)!}{(l'+m)!}} 2\pi\delta_{mm'}\int_{-1}^{1} dx P_l^m(x) P_{l'}^{m}(x) \\
= &\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} 2\pi\delta_{mm'}\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'} \\
= &\delta_{ll'}\delta_{mm'}
\end{aligned}$$

3.3. Teljesség

Ha adott a gömbfelületen egy $f(\theta,\phi)$ négyzetesen integrálható függvény, azaz

$$\int d\Omega \left|f(\theta,\phi)\right|^2 < \infty$$

akkor kifejthető gömbfüggvények szerint

$$\begin{aligned}
f(\theta,\phi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} f_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \\
f_{lm} &= \int d\Omega Y_{lm}(\theta,\phi)^* f(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

Ez mit is jelent?

$$\begin{aligned}
f(\theta,\phi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \int d\Omega' Y_{lm}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta',\phi')^* f(\theta',\phi') \\
&= \int d(\cos\theta') \int d\phi \left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} Y_{lm}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta',\phi')^*\right) f(\theta',\phi')
\end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} Y_{lm}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta',\phi')^* = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi-\phi')$$

Ez fejezi ki azt, hogy a gömbfüggvények rendszere teljes.

3.4. Addíciós tétel

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

ahol γ a θ,ϕ és a θ',ϕ' polárszögekkel jellemzett irányok közötti szög.

4. Bessel-függvények

A Bessel-féle differenciálegyenlet

$$J''(x) + \frac{1}{x}J'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J(x) = 0$$

4.1. Hatványsor megoldás

$$\begin{aligned} J(x) &= x^\alpha \sum_n c_n x^n \\ &\Downarrow \\ \alpha = \pm\nu \qquad & c_{2k} = -\frac{1}{4k(k+\alpha)}c_{2k-2} \\ & c_{2k-1} = 0 \end{aligned}$$

A megoldást felírhatjuk a gamma-függvény

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty dt\, t^{x-1}e^{-t} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin\pi x} \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

segítségével. A standard induló normálás

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$$

ekkor

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}k!\Gamma(k+\alpha+1)}$$

Ha $\nu \notin \mathbb{N}$, akkor a két független megoldás

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ J_{-\nu}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \tag{6}$$

ezek a sorok minden $x \in \mathbb{C}$-re abszolút konvergensek.

Azonban, ha $\nu = m \in \mathbb{N}$

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Ezt úgy oldjuk meg, hogy definiáljuk a Neumann-függvényt

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

J_ν és N_ν mindig bázist alkot; N_ν-nek akkor is van limesze, ha $\nu \to m \in \mathbb{Z}$.

A Bessel-egyenlet megoldásának egy másik bázisát adják az ún. Hankel-függvények

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x)$$

Az összes ilyen függvényre igaz, hogy

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}\Omega_\nu(x) \\ \Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) &= 2\frac{d\Omega_\nu(x)}{dx} \end{aligned}$$

ahol Ω lehet J, N vagy $H^{(1,2)}$.

Bizonyítás: a (6) sorból explicit számítással látható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

Elvégezve a deriválást a fenti formulákban kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) \\ -\frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= -J_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) &= \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x) \\ J_{\nu+1}(x) &= \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x) \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva és kivonva

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2\frac{dJ_\nu(x)}{dx} \end{aligned}$$

innen pedig N_ν és $H_\nu^{(1,2)}$ definícióját használva ez utóbbiakra is következik az állítás.

A Bessel-függvények előállíthatók a következő integrállal:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{ixt}dt \qquad \nu > -1/2$$

Bizonyítás: fejtsük sorba az exponenciálist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ixt)^n}{n!}dt \\ = &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^n dt \end{aligned}$$

A

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^n dt$$

integrál 0, ha n páratlan. Ha pedig $n=2s$, akkor

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2s}dt &= 2\int_{0}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2s}dt \\ &= \int_{0}^{+1}(1-u)^{\nu-1/2}u^{s-1/2}dt \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s+\nu+1)}\end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\Gamma(s+1/2)=(s+1/2)(s-1/2)...(1/2)\Gamma(1/2)$$

és $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, ezért

$$\Gamma(s+1/2)=\frac{(2s)!}{2^{2s}s!}\sqrt{\pi}$$

Ezt beírva, az integrálunk

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{ixt}dt &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \\ &= J_\nu(x)\end{aligned}$$

Explicit számolással látható továbbá, hogy

$$\begin{aligned}J_\nu(x) &\to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \\ N_\nu(x) &\to \begin{cases}\frac{2}{\pi}\left(\log\frac{x}{2}+\gamma\right) & \nu=0\\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} & \nu\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

ahol

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=0.5772\ldots$$

az Euler-Mascheroni állandó. Nagy x-re pedig

$$\begin{aligned}J_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ N_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Ez utóbbit a módosított Bessel-függvények segítségével igazoljuk.

4.2. Módosított Bessel-egyenlet

$$Y''(x)+\frac{1}{x}Y'(x)-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)Y(x)=0$$

Ennek megoldásai a módosított Bessel-függvények $I_{\pm\nu}(x)$, ahol

$$\begin{aligned}I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= i^{-\nu}J_\nu(ix)\end{aligned}$$

ahol, ha ν nem egész, akkor a következőképpen kell érteni a komplex hatványt:

$$i^{-\nu} = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}$$

Ha $\nu = m$ egész, akkor $I_m \equiv I_{-m}$ és a másik független megoldás

$$\begin{aligned} K_m(x) &= \lim_{\nu\to m} K_\nu(x) \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \end{aligned}$$

Explicit számolással (N_ν és $H_\nu^{(1)}$ definícióját használva) látható, hogy

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

itt a komplex hatvány értéke

$$i^{\nu+1} = e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}$$

Ezekre a függvényekre a rekurziós relációk

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^\nu I_\nu(x)\right) &= x^\nu I_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} I_\nu(x)\right) &= x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \\ \frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I'_\nu(x) &= I_{\nu-1}(x) \\ -\frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I'_\nu(x) &= I_{\nu+1}(x) \\ I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) \\ I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) &= 2\frac{dI_\nu(x)}{dx} \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^\nu K_\nu(x)\right) &= -x^\nu K_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} K_\nu(x)\right) &= -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) \\ \frac{\nu}{x} K_\nu(x) + K'_\nu(x) &= -K_{\nu-1}(x) \\ -\frac{\nu}{x} K_\nu(x) + K'_\nu(x) &= -K_{\nu+1}(x) \\ K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) \\ K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) &= -2\frac{dK_\nu(x)}{dx} \end{aligned}$$

(bizonyítás mint J-re).

Az I_n módosított Bessel-függvényekre átvihető a J_n Bessel-függvények integrál előállítása:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \qquad x > 0\ ,\ \nu > -1/2 \end{aligned}$$

Másrészt igazolható, hogy

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty (t^2-1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \qquad x > 0\ ,\ \nu > -1/2$$

Ez utóbbit úgy tudjuk belátni, hogy megmutatjuk, hogy

$$P_\nu(x) = x^\nu \int_1^\infty (t^2-1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt$$

kielégíti a módosított Bessel-egyenletet:

$$\begin{aligned} & x^2 P_\nu''(x) + x P_\nu'(x) - \left(x^2+\nu^2\right) P_\nu(x) \\ = \ & x^{\nu+1} \int_1^\infty \left[x(t^2-1)^{\nu+1/2} - \left(n+\frac{1}{2}\right) 2t(t^2-1)^{\nu-1/2} \right] e^{-xt} dt \\ = \ & -x^{\nu+1} \int_1^\infty \frac{d}{dt}\left[(t^2-1)^{\nu+1/2} e^{-xt}\right] dt = 0 \end{aligned}$$

ezért

$$P_\nu(x) = A_\nu I_\nu(x) + B_\nu K_\nu(x)$$

Nagy és pozitív x-re helyettesítsünk

$$t = 1 + \frac{u}{x}$$

ekkor

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &= x^{\nu+1} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{x} + \frac{u^2}{x^2}\right)^{\nu-1/2} e^{-x-u} du \\ &= x^{\nu+1} \left(\frac{2u}{x}\right)^{\nu-1/2} e^{-x} \int_0^\infty \left(1+\frac{u}{2x}\right)^{\nu-1/2} u^{\nu-1/2} e^{-u} du \\ &\approx x^{\nu+1} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-1/2} e^{-x} \int_0^\infty u^{\nu-1/2} e^{-u} du \\ &= \Gamma(\nu+1/2) x^{\nu+1} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-1/2} e^{-x} \propto x^{-1/2} e^{-x} \end{aligned}$$

Tehát

$$P_\nu(x) \to 0 \qquad x \to \infty$$

Mivel $I_n(x)$ hatványsorában az összes együttható pozitív, ezért $I_n(x)$ a végtelenhez tart, ha $x \to \infty$. Ebből következik, hogy $A_\nu = 0$, azaz

$$P_\nu(x) = B_\nu K_\nu(x)$$

B_ν onnan számítható ki, hogy megnézzük a két oldal viselkedését $x = 0$ körül. Ekkor ismét a

$$t = 1 + \frac{u}{x}$$

helyettesítést használva

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &= x^\nu \int_1^\infty (t^2-1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \\ &= x^{\nu+1} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{x} + \frac{u^2}{x^2}\right)^{\nu-1/2} e^{-x-u} du \\ &= x^{-\nu} e^{-x} \int_0^\infty \left(1+\frac{2x}{u}\right)^{\nu-1/2} u^{2\nu-1} e^{-u} du \\ &\approx x^{-\nu} \int_0^\infty u^{2\nu-1} e^{-u} du \\ &= \Gamma(2\nu) x^{-\nu} \end{aligned}$$

Másrészt I_n hatványsorát és K_n definícióját használva

$$K_\nu(x) \sim \frac{\Gamma(\nu)2^{\nu-1}}{x^\nu}$$

ezért tehát

$$B_\nu = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)2^{\nu-1}}$$

De

$$\Gamma(2\nu) = \frac{2^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1/2)$$

ezért

$$B_\nu = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu+1/2)$$

Tehát

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{1}{B_\nu}P_\nu(x) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty (t^2-1)^{\nu-1/2}e^{-xt}dt \end{aligned}$$

4.3. A Bessel-függvények aszimptotikus viselkedése

Felhasználva, hogy nagy x-re

$$P_\nu(x) \sim \Gamma(\nu+1/2)x^{\nu+1}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-1/2} e^{-x}$$

azt kapjuk, hogy

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$$

Viszont

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$$

ezért nagy x-re

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-(\nu+1/2)\pi/2)}$$

Viszont

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \mathrm{Re}\ H_\nu^{(1)}(x) \\ K_\nu(x) &= \mathrm{Im}\ H_\nu^{(1)}(x) \end{aligned}$$

ezért nagy x-re

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ N_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

4.4. Néhány hasznos integrálformula módosított Bessel-függvényekkel

1. A Cserenkov-sugárzás kiszámításánál használjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{isx}}{\sqrt{s^2+1}} = 2K_0(|t|)$$

és a fentiekben kiszámolt aszimptotikus viselkedést:

$$K_0(x) = e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,(1 + O(1/x))$$

2. A szinkrotron sugárzás kiszámításakor felhasználtuk az

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \sin\left[\frac{2}{3}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(x) \\ \int_0^{\infty} \cos\left[\frac{2}{3}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(x) \end{aligned}$$

összefüggéseket.

3. A szinkrotron sugárzás spektrumának frekvencia szerinti kiintegrálásához pedig a következő formula jön jól:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx\, x^{\alpha} K_{\nu}(x)^2 &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+\nu\right)}{4\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \text{ahol} \quad & \mathrm{Re}\,(\alpha + 2\nu) > -1 \\ \text{és} \quad & \mathrm{Re}\,(\alpha - 2\nu) > -1 \end{aligned}$$

pontosabban ennek $\alpha = 2$ esete:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 K_{\nu}(\xi)^2 &= \frac{\pi^2}{32}\frac{(1-4\nu^2)}{\cos\pi\nu} \\ \text{ahol} \quad & |\mathrm{Re}\,\nu| < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

amiből a frekvenciaintegráláshoz szükséges formulák a következők:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\xi\xi^2 K_{1/3}(\xi)^2 &= \frac{5\pi^2}{144} \\ \int_0^{\infty} d\xi\xi^2 K_{2/3}(\xi)^2 &= \frac{7\pi^2}{144} \end{aligned}$$

4.5. A Bessel-függvények gyökei

A

$$J_{\nu}(x) = 0$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van:

$$x_{\nu n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

J_{ν} aszimptotikáját felhasználva, az origótól távol fekvő gyökök értéke

$$x_{\nu n} \sim n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

4.6. Egy fontos integrál

Amennyiben

$$J_\nu(\xi a) = 0$$

akkor

$$\int_0^a x\,[J_\nu(\xi x)]^2\,dx = \frac{a^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\xi a)]^2$$

Először is J_n megoldja a Bessel-egyenletet, ezért

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\xi x) + x\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x) + (\xi^2x^2-\nu^2)J_\nu(\xi x) = 0$$

így

$$\begin{aligned} 0 &= 2J'_\nu(\xi x)\left(x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\xi x) + x\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x) + (\xi^2x^2-\nu^2)J_\nu(\xi x)\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^2\left(\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)\right)^2 + (\xi^2x^2-\nu^2)J_\nu(\xi x)^2\right) - 2\xi^2xJ_\nu(\xi x)^2 \end{aligned}$$

azaz

$$2\xi^2xJ_\nu(\xi x)^2 = \frac{d}{dx}\left(x^2\left(\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)\right)^2 + (\xi^2x^2-\nu^2)J_\nu(\xi x)^2\right)$$

ahonnan

$$\begin{aligned} 2\xi^2\int_0^a xJ_\nu(\xi x)^2dx &= a^2\left(\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)\right)^2\Bigg|_{x=a} + (\xi^2a^2-\nu^2)J_\nu(\xi a)^2 \\ &+ \nu^2J_\nu(0)^2 \end{aligned}$$

Na most egyfelől nemnegatív ν-re

$$\nu J_\nu(0) = 0$$

másfelől

$$J_\nu(\xi a) = 0$$

így

$$\int_0^a xJ_\nu(\xi x)^2dx = \frac{1}{2\xi^2}a^2\left(\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)\right)^2\Bigg|_{x=a}$$

Viszont

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x)$$

ahonnan

$$\xi J_{\nu+1}(\xi x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(\xi x) - \frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)\Bigg|_{x=a} &= \frac{\nu}{a}J_\nu(\xi a) - \xi J_{\nu+1}(\xi a) \\ &= -\xi J_{\nu+1}(\xi a) \end{aligned}$$

Innen

$$\int_0^a x\,[J_\nu(\xi x)]^2\,dx = \frac{a^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\xi a)]^2$$

4.7. A Bessel-függvények ortogonalitása

$$\begin{aligned}
0 &= \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) + \rho \frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n}\rho/a) + \left(x_{\nu n}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \\
& \rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n}\rho/a) \right) + \left(x_{\nu n}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)
\end{aligned}$$

Szorozzuk ezt be $\rho^{-1} J(x_{\nu n'}\rho/a)$-val, integráljuk ki és integráljunk parciálisan az első tagban:

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_0^a d\rho\rho \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n}\rho/a) \right] \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n'}\rho/a) \right] \\
&+ \int_0^a d\rho\rho^{-1} J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) \left(x_{\nu n}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)
\end{aligned}$$

Cseréljük meg n-et és n'-t:

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_0^a d\rho\rho \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n'}\rho/a) \right] \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n}\rho/a) \right] \\
&+ \int_0^a d\rho\rho^{-1} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \left(x_{\nu n'}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)
\end{aligned}$$

A két egyenletet egymásból kivonva

$$a^{-2} \left(x_{\nu n'}^2 - x_{\nu n}^2 \right) \int_0^a d\rho\rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) = 0$$

amiből az előbb igazolt formulát felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_0^a d\rho\rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) = \frac{a^2}{2} \left[J_{\nu+1}(x_{\nu n}) \right]^2 \delta_{nn'}$$

4.8. Bessel-Fourier sor és teljesség

Bármely ν-re, a

$$J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \qquad n \in \mathbb{N}$$

függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak a $[0, a]$ intervallumon. Ha egy f függvény négyzetesen integrálható az

$$\int_0^a d\rho\rho \left| f(\rho) \right|^2 < \infty$$

értelemben, akkor f felírható

$$f(\rho) = \sum_n f_n J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$$

alakban, ahol az ortogonalitási relációt felhasználva

$$f_n = \frac{2}{\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n} a) \right]^2} \int_0^a d\rho\rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) f(\rho)$$

Tehát

$$f(\rho) = \int_0^a d\rho' \rho' \sum_n \frac{2}{\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n}) \right]^2} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n}\rho'/a) f(\rho')$$

azaz

$$\sum_n \frac{2}{\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n}) \right]^2} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n}\rho'/a) = \frac{1}{\rho'} \delta(\rho - \rho')$$

4.9. Hankel transzformáció

Ha végtelen félegyenest veszünk, azaz

$$a \to \infty$$

akkor a

$$\frac{x_{\nu n}}{a}$$

"hullámszámok" besűrűsödnek és folytonossá válnak a 0 és ∞ között; legyen az ennek megfelelő változó jele k. Ekkor az ortogonalitási reláció határesete a következő alakú lesz:

$$\int_0^\infty d\rho\rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k}\delta(k-k')$$

Ha f-re igaz, hogy

$$\int_0^\infty d\rho\rho^{1/2} \left|f(\rho)\right|$$

véges, akkor a következő alakba írható:

$$f(\rho) = \int_0^\infty dk\, k F_\nu(k) J_\nu(k\rho)$$

ahol az $F_\nu(k)$ Hankel-transzformált

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty d\rho\, \rho f(\rho) J_\nu(k\rho)$$

Ez a Fourier transzformáció megfelelője a félegyenesen, és minden $\nu > -1/2$ esetére definiált.