Matematikai segédlet az Elektrodinamika 2. vizsgához

Takács Gábor

2015. december 13.

1. Legendre-polinomok

A Legendre-féle differenciálegyenlet

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + \nu(\nu+1)P = 0 \tag{1}$$

Normálás:

$$P_l(1) = 1$$

Rodrigues formula

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

A Legendre polinomok generátorfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

Ortogonalitási relációja

$$\int_{-1}^{1} dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

2. Asszociált Legendre függvények

Az asszociált Legendre-egyenlet

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P = 0 \tag{2}$$

Asszociált Legendre-függvények

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

ha $0 \leq m$. Kiterjesztés $m < 0$-ra:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

Az asszociált Legendre-függvények alapvető tulajdonságai:

1. $P_l^{m=0}(x) = P_l(x)$
2. $P_l^m(x) = 0$, $m > l$.

3. Ortogonalitás
$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0$$
ha $l \neq l'$.

4. Normálás
$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

3. Gömbfüggvények

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

Ortonormáltság

$$\int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Addíciós tétel

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

ahol γ a θ, ϕ és a θ', ϕ' polárszögekkel jellemzett irányok közötti szög.

4. Bessel-függvények

4.1. Standard Bessel-függvények

A Bessel-féle differenciálegyenlet

$$J''(x) + \frac{1}{x} J'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J(x) = 0$$

Ha $\nu \notin \mathbb{N}$, akkor a két független megoldás

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ J_{-\nu}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \quad (3)$$

ezek a sorok minden $x \in \mathbb{C}$-re abszolút konvergensek.

Ha $\nu = m \in \mathbb{N}$
$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Neumann-függvény:
$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

J_ν és N_ν mindig bázist alkot.

Hankel-függvények
$$H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm i N_\nu(x)$$

Az összes ilyen függvényre igaz, hogy

$$\begin{aligned}
\Omega_{\nu-1}(x)+\Omega_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}\Omega_\nu(x) \\
\Omega_{\nu-1}(x)-\Omega_{\nu+1}(x) &= 2\frac{d\Omega_\nu(x)}{dx}
\end{aligned}$$

ahol Ω lehet J, N vagy $H^{(1,2)}$.

A Bessel-függvények előállíthatók a következő integrállal:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{ixt}dt \qquad \nu>-1/2$$

Kis x-re

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &\to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\
N_\nu(x) &\to \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\log\frac{x}{2}+\gamma\right) & \nu=0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu\neq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

ahol

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=0.5772\ldots$$

az Euler-Mascheroni állandó. Nagy x-re pedig

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
N_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

4.2. Módosított Bessel-egyenlet

$$Y''(x)+\frac{1}{x}Y'(x)-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)Y(x)=0$$

Ennek megoldásai a módosított Bessel-függvények $I_{\pm\nu}(x)$, ahol

$$\begin{aligned}
I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= i^{-\nu}J_\nu(ix)
\end{aligned}$$

ahol, ha ν nem egész, akkor a következőképpen kell érteni a komplex hatványt:

$$i^{-\nu}=e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}$$

Ha $\nu=m$ egész, akkor $I_m\equiv I_{-m}$ és a másik független megoldás

$$\begin{aligned}
K_m(x) &= \lim_{\nu\to m}K_\nu(x) \\
K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{I_\nu(x)-I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}
\end{aligned}$$

Kapcsolat a Hankel-függvényekkel

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$$

itt a komplex hatvány értéke

$$i^{\nu+1} = e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}$$

Ezekre a függvényekre a rekurziós relációk

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} I_{\nu}(x)\right) &= x^{\nu} I_{\nu-1}(x) \\
\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} I_{\nu}(x)\right) &= x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \\
\frac{\nu}{x} I_{\nu}(x) + I'_{\nu}(x) &= I_{\nu-1}(x) \\
-\frac{\nu}{x} I_{\nu}(x) + I'_{\nu}(x) &= I_{\nu+1}(x) \\
I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x) \\
I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) &= 2\frac{dI_{\nu}(x)}{dx}
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} K_{\nu}(x)\right) &= -x^{\nu} K_{\nu-1}(x) \\
\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} K_{\nu}(x)\right) &= -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) \\
\frac{\nu}{x} K_{\nu}(x) + K'_{\nu}(x) &= -K_{\nu-1}(x) \\
-\frac{\nu}{x} K_{\nu}(x) + K'_{\nu}(x) &= -K_{\nu+1}(x) \\
K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x) \\
K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) &= -2\frac{dK_{\nu}(x)}{dx}
\end{aligned}$$

(bizonyítás mint J-re).

Integrál előállítások:

$$\begin{aligned}
I_{\nu}(x) &= i^{-\nu} J_{\nu}(ix) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \qquad x > 0 \;,\; \nu > -1/2 \\
K_{\nu}(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_{1}^{\infty} (t^2-1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \qquad x > 0 \;,\; \nu > -1/2
\end{aligned}$$

A módosított Bessel-függvények aszimptotikus viselkedése

$$K_{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O(1/x)\right)$$

4.3. A Bessel-függvények gyökei

A

$$J_{\nu}(x) = 0$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van:

$$x_{\nu n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

J_ν aszimptotikáját felhasználva, az origótól távol fekvő gyökök értéke

$$x_{\nu n} \sim n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

Néhány gyök közelítő értéke

$\nu \backslash n$	1	2	3	4	5	6
0	2.40483	5.52008	8.65373	11.7915	14.9309	18.0711
1	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237	16.4706	19.6159
2	5.13562	8.41724	11.6198	14.796	17.9598	21.117
3	6.38016	9.76102	13.0152	16.2235	19.4094	22.5827

4.4. Egy fontos integrál és az ortogonalitási reláció

Amennyiben

$$J_\nu(\xi a) = 0$$

akkor

$$\int_0^a x\left[J_\nu(\xi x)\right]^2 dx = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\xi a)\right]^2$$

Ortogonalitás:

$$\int_0^a d\rho\rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right]^2 \delta_{nn'}$$

4.5. Hankel transzformáció

Ha végtelen félegyenest veszünk, azaz

$$a \to \infty$$

akkor az ortogonalitási reláció határesete a következő lesz:

$$\int_0^\infty d\rho\rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k}\delta(k - k')$$

Ha f-re igaz, hogy

$$\int_0^\infty d\rho\rho^{1/2}\left|f(\rho)\right|$$

véges, akkor a következő alakba írható:

$$f(\rho) = \int_0^\infty dk\, k F_\nu(k) J_\nu(k\rho)$$

ahol az $F_\nu(k)$ Hankel-transzformált

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty d\rho\, \rho f(\rho) J_\nu(k\rho)$$

Ez a Fourier transzformáció megfelelője a félegyenesen, és minden $\nu > -1/2$ esetére definiált.

5. Néhány hasznos formula Legendre- és Bessel-függvényekkel

1. A csúcshatáshoz használtuk, hogy

$$P_\nu(\cos\theta) \sim J_0\left((2\nu+1)\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ha $\theta < 1$, ν nagy, $P_\nu(x)$ a Legendre-egyenlet $x = 1$-ben reguláris megoldása és

$$P_\nu(1) = 1$$

valamint azt, hogy amennyiben ν_0 a legkisebb olyan ν, amire

$$P_\nu(\cos\beta) = 0$$

akkor

$$\nu_0 \simeq \left[2\ln\left(\frac{2}{\pi-\beta}\right)\right]^{-1}$$

ha $\pi - \beta$ kicsi.

2. A Cserenkov-sugárzás kiszámításánál használtuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{ist}}{\sqrt{s^2+1}} = 2K_0(|t|)$$

6. Tetszőleges mozgást végző ponttöltés elektromos és mágneses térerőssége

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(1-\vec{\beta}(\bar{t})^2\right)\frac{\vec{R}-R\vec{\beta}(\bar{t})}{\left(R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}(\bar{t})\right)^3} + \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-R\vec{\beta}(\bar{t})\right)\times\vec{a}(\bar{t})\right]}{\left(R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}(\bar{t})\right)^3} \\
\vec{H}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{Z_0}\hat{R}\times\vec{E}(t,\vec{x})
\end{aligned}$$