1. Végtelenül vékony szolenoid körül körpályán mozgó töltés

   Legyen a vektorpotenciál henger koordináta rendszerben:

$$A_\varphi = \frac{\Phi g(\varphi)}{\rho}\ ,\ A_\rho = A_z = 0$$

   rot$\mathbf{A} = 0$ ha $r \neq 0$, A szolenoid fluxusa:

$$\Phi = \oint \mathbf{A} dr = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi g(\varphi)}{\rho} \rho d\varphi = \Phi \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi\ , \quad \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 1$$

   A q töltésű részecske egy a sugrú körpályán mozog.

$$p_\varphi = \frac{\hbar}{ia} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

   A Hamilton operátor:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\varphi - qA_\varphi\right)^2$$

   A Schrödinger egyenlet:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{ia} \frac{\partial}{\partial \varphi} - qA_\varphi\right)^2 \psi = E\psi\ , \qquad \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\Phi q}{\hbar} g(\varphi)\right)^2 \psi = E\psi$$

   Először keressük a

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\Phi q}{\hbar} g(\varphi) \psi = \lambda \psi$$

   differenciálegyenlet megoldását. Ekkor $E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \lambda^2$.

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \left(\lambda + \frac{\Phi q}{\hbar} g(\varphi)\right) \psi$$

   A megoldás:

$$\psi = C e^{i\lambda\varphi + \frac{i\Psi q}{\hbar} \int g(\varphi) d\varphi}$$

   A hullámfüggvény egyértékűségéből következik, hogy $\psi(0) = \psi(2\pi)$:

$$\lambda 2\pi + \frac{\Psi q}{\hbar} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 2n\pi\ , \quad \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 1$$

$$2\pi\lambda + \frac{\Psi q}{\hbar} = 2n\pi\ , \qquad \lambda = n - \frac{\Psi q}{\hbar}\ , \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(n - \frac{\Psi q}{\hbar}\right)^2$$

   A részecske mágnesestér mentes helyen mozog, mégis befolyásolja a vektorpotenciál a mozgását.

2. Landau nívók aszimmetriku mérték esetén

   Legyen a vektorpotenciál:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Írjuk fel a homogén mágneses térben mozgó részecske Hamilton operátorát!

   (b) Mutassuk meg, hogy a Hamilton operátor felcserélhető p_y és p_z operátorokkal!

   (c) A megoldást keressük $\psi(x,y,z) = \varphi_{k_y,n}(x) e^{ik_y y} e^{ik_z z}$ alakban. Mi lesz a Schrödinger egyenlet a $\varphi_{k_y,n}(x)$ hullámfüggvényre?

   (d) Teljes négyzetté alakítás segítségével oldjuk meg a Schrödinger egyenletet!