4. gyakorlat (okt. 2.)

1. Határozzuk meg a teljes szórási hatáskeresztmetszetet a következő potenciál esetében:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{ha } r \leq R \\ 0 & \text{ha } r < R \end{cases}$$

   a.) Vizsgáljuk meg az alacsony energiás határesetet és

   a.) a nagy energiás határesetet!

2. Határozzuk meg a szórási hatáskeresztmetszetet a következő potenciál esetén:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{ha } r \leq R \\ 0 & \text{ha } r < R \end{cases}$$

A radiális szabad megoldások szférikus Bessel és Neumann függvények: $j_l(r)$, $n_l(r)$, ezek aszimptótikus alakjai:

$$\lim_{r\to\infty} j_l(r) = \frac{1}{r}\sin(r - l\frac{\pi}{2}) \qquad \lim_{r\to 0} j_l(r) = \frac{r^l}{(2l+1)!!} = \frac{2^l l!}{(2l+1)!}r^l$$

$$\lim_{r\to\infty} n_l(r) = -\frac{1}{r}\cos(r - l\frac{\pi}{2}) \qquad \lim_{r\to 0} n_l(r) = -\frac{(2l+1)!!}{r^{l+1}} = -\frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{r^{l+1}} \,,$$

A teljes hatáskeresztmetszet megadható a fázistolások segítségével:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(\delta_l)$$

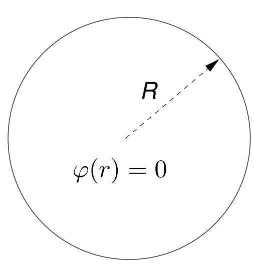
HF:

Határozzuk meg a szórási hatáskeresztmetszetet a parciális hullámok módszerével Dirac-delta hély potenciál esetén:

$$V(r) = \gamma\delta(r-R)\,!$$

1.

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{ha } r \leq R \\ 0 & \text{ha } r < R \end{cases}$$



$$\varphi(r) = \underbrace{a j_l(kr) + b n_k(kr)}_{\text{szabad m.o.}}$$

A gömb felületén a radális megoldások folytonosak:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}j_l(kR) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}n_l(kR)\right) = 0 \,,$$

ahol $j_l(kr)$ és $n_l(kr)$ a szférikus Bessel és Neumann függvények. Vezessünk be a δ_l új változót: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\delta_l)$ és $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\delta_l)$.

Vizsgáljuk a Bessel függvények aszimptótikus viselkedését:

$$\cos(\delta_l)\frac{1}{kr}\sin(kr - l\frac{\pi}{2}) - \sin(\delta_l)\frac{1}{kr}\cos(kr - l\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{kr}\sin(kr + \delta_l - l\frac{\pi}{2})$$

A fázistolás leolvashatóan az új δ_l változó lesz. A gömb határán:

$$\cos(\delta_l)j_l(kR) - \sin(\delta_l)n_l(kR) = 0 \quad \text{ahonnan} \quad \boxed{\mathrm{tg}(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kr)}}$$

- Alacsony energiás határeset:

$$\mathrm{tg}(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kr)} = \frac{2^l l!}{(2l+1)!}(kR)^l \frac{2^l l!}{(2l)!}(kR)^{l+1}$$

  Ha $kR \to 0$ csak az $l = 0$ fázistolás ad járulékot: $\delta_0 = kR$.

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(\delta_l) = \frac{4\pi}{k^2}(kR)^2 = 4\pi R^2$$

- Nagy energiás határeset:

$$\mathrm{tg}(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kr)} = -\frac{\frac{1}{kR}\sin(kR - l\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{kR}\cos(kR - l\frac{\pi}{2})} = \mathrm{tg}(l\frac{\pi}{2} - kR), \qquad \delta_l = l\frac{\pi}{2} - kR$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(l\frac{\pi}{2} - kR)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(l\frac{\pi}{2} - kR) =$$

$$\begin{array}{lr} \sin^2(kR)+ & \cos^2(kR)+ \\ 2\cos^2(kR)+ & 2\sin^2(kR)+ \\ 3\sin^2(kR)+ & 3\cos^2(kR)+ \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$= \sum_{l=1}^{l_{max}} l = \frac{1}{2}l_{max}(l_{max}+1) \approx \frac{1}{2}l_{max}^2$$

  Klasszikus analógiából: $l_{max} = kR$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{2}(kR)^2 = 2\pi R^2$$

2.

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{ha } r \leq R \\ 0 & \text{ha } r < R \end{cases}$$

A gömbön belül a reguláris megoldás:

$$\varphi(r) = j_l(\kappa r), \qquad \kappa^2 = k^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

A gömbön kívül a hullámfüggvény:

$$\varphi(r) = a j_l(kr) + b n_l(kr), \qquad \mathrm{tg}(\delta_l) = \frac{b}{a}$$

A gömb felületén a radiális hullámfüggvény és a deriváltja is folytonos:

$$\begin{aligned} j_l(\kappa R) &= a j_l(kR) + b n_l(kR) \\ \kappa j_l'(\kappa R) &= a k j_l'(kR) + b k n_l'(kR) \end{aligned}$$

Mátrixalakban:

$$\begin{pmatrix} j_l(kR) & n_l(kR) \\ kj_l'(kR) & kn_l'(kR) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_l(\kappa R) \\ \kappa j_l'(\kappa R) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{det}(du - bv) = x, \qquad \frac{1}{det}(-cu + av) = y$$

$$\frac{y}{x} = \frac{av - cu}{du - bv}$$

$$\mathrm{tg}(\delta_l) = \frac{j_l(kR)\kappa j_l'(\kappa R) - kj_l'(kR)j_l(\kappa R)}{kn_l'(kR)j_l(\kappa R) - n_l(kR)\kappa j_l'(\kappa R)}$$