Klein-Gordon egyenlet

Klein-Gordon egyenlet külső elektromágneses tér jelenlétében:

$$\left(\sum_{\mu}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}-qA_{\mu}\right)^{2}+m^{2}c^{2}\right)\psi=0\,,\qquad A=\begin{pmatrix}\frac{V}{qc}\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\partial_t-V\right)^2\psi=\left((\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2+m^2c^2\right)\psi$$

Töltéssűrűség és áramsűrűség:

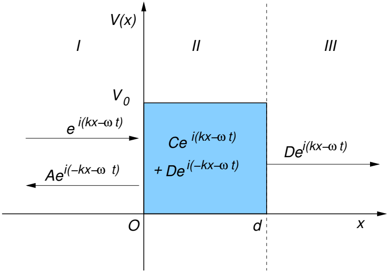
$$\rho=\frac{iq\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\partial_t\psi-\psi\partial_t\psi^*\right)-\frac{qV}{mc^2}\psi^*\psi$$

$$\mathbf{j}=\frac{q\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)-\frac{q\mathbf{A}}{m}\psi^*\psi$$

$$j_{\mu}=\frac{q\hbar}{2im}\left(\psi^*\partial_{\mu}\psi-\psi\partial_{\mu}\psi^*\right)-\frac{qA_mu}{m}\psi^*\psi\,,\quad j=\begin{pmatrix}c\rho\\ j_1\\ j_2\\ j_3\end{pmatrix}$$

Klein-Gordon egyenlet

Klein paradoxon



Tekintsünk egy V_0 magasságú, d szélességű potenciálgátat. A Klein-Gordon egyenlet:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\partial_t - V\right)^2\psi = \left(-\hbar^2\partial_x^2 + m^2c^2\right)\psi$$

$$\psi = e^{i(kx-\omega t}$$

$$k = \pm\frac{1}{\hbar c}\sqrt{(\hbar\omega - V_0)^2 - m^2c^4}$$

I. tartomány	II. tartomány	III. tartomány
$e^{i(kx-\omega t)} + Ae^{i(-kx-\omega t)}$	$Be^{i(k'x-\omega t)} + Ce^{i(-k'x-\omega t)}$	$De^{i(kx-\omega t)}$
$ike^{i(kx-\omega t)} - ikAe^{i(-kx-\omega t)}$	$ik'Be^{i(k'x-\omega t)} - ik'Ce^{i(-k'x-\omega t)}$	$ikDe^{i(kx-\omega t)}$

Klein paradoxon

I.-II. tartomány határa

$$\begin{aligned} 1+A &= B+C \\ ik - ikA &= ik'B - ik'C \end{aligned} \;, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik' & -ik' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2k'} \begin{pmatrix} k'+k & k'-k \\ k'-k & k'+k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

II.-III. tartomány határa

$$\begin{aligned} Be^{ik'd} + Ce^{-ik'd} &= De^{ikd} \\ ik'Be^{ik'd} - ik'Ce^{-ik'd} &= ikDe^{ikd} \end{aligned} \;, \begin{pmatrix} e^{ik'd} & e^{-ik'd} \\ ik'e^{ik'd} & -ik'e^{-ik'd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = e^{ikd} D \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{ik'd} & e^{-ik'd} \\ ik'e^{ik'd} & -ik'e^{-ik'd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ik'+ik & ik'-ik \\ ik'-ik & ik'+ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A \end{pmatrix} = \tilde{D} \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} \;, \; \tilde{D} = 2k'e^{ikd}D$$

Klein paradoxon

$$A = \frac{(k'^2 - k^2)\sin(k'd)}{(k'^2 + k^2)\sin(k'd) + ikk'\cos(k'd)}$$

A visszaverődési együttható: $R = |A|^2$ és az áthatolási együthat́ó $T = |D|^2$.
Ha $k'd = n\pi$, akkor az áthatolási együttható $T = 1$.

$$k = \pm\frac{1}{\hbar c}\sqrt{\hbar^2\omega^2 - m^2c^4}\,, \quad k' = \pm\frac{1}{\hbar c}\sqrt{(\hbar\omega - V_0)^2 - m^2c^4}\,, \quad E = \hbar\omega$$

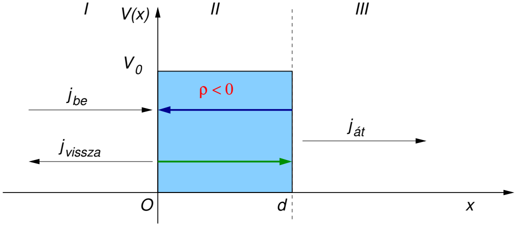
A szabad részecske ($x < 0\,,\ x > d$) hullámszáma valós: $E \geq mc^2$,
$\psi = e^{i(kx - \omega t)}$

$$\rho = \frac{iq\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) - \frac{qV}{mc^2}\psi^*\psi = \boxed{q\frac{\hbar\omega - V}{mc^2}}$$

$$\mathbf{j} = \frac{q\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{q\mathbf{A}}{m}\psi^*\psi = \boxed{q\frac{\hbar k}{m}}$$

Klein paradoxon

- $V_0 < E - mc^2$ A k' hullámszám valós, $T = 1$, ha $k'd = n\pi$
- $E - mc^2 < V_0 < E + mc^2$ A k' hullámszám képzetes, a gáton belül lecsengő megoldások, $T < 1$, alagút effektus.
- $V > E + mc^2$ A k' hullámszám ismét valós, $T = 1$, ha $k'd = n\pi$, a gáton belül $\rho = q\dfrac{E - V}{mc^2} < 0$ sűrűség negatív. A jobbról balra folyó negatív részecske áramot az antirészecskék balról jobbra folyó pozitív áramaként értelmezzük!



$$T = \frac{j_{at}}{j_{be}}$$

$$R = 1 - T = \frac{j_{vissza}}{j_{be}}$$

Klein-Gordon egyenlet homogén mágneses térben

Klein-Gordon egyenlet:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\partial_t\right)^2\psi = \left((\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2 + m^2c^2\right)\psi$$

Keressük a megoldást $\psi = e^{-\omega t}\varphi(\mathbf{r})$ alakban és helyettesítsük be a KG egyenletbe:

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}\varphi = \frac{E^2}{c^2}\varphi = \left((\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2 + m^2c^2\right)\varphi$$

Rendezzük át az egyenletet és mindkét oldalt bővítsük $1/2m$-mel:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right)\varphi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2\varphi$$

A jobb oldalon álló tag ismerős a Schrödinger egyenletből:

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2\varphi_{nm} = \tilde{E}_n\varphi_{nm}$$

ahol $\tilde{E}_n = \hbar\omega_L(n+\frac{1}{2})$ és $\varphi_{nm} = \frac{a_1^{+\,n}a_2^{+\,m}}{\sqrt{n!m!}}|0,0\rangle$ harmonikus oszcillátor hullámfüggvények, $\omega_L = \frac{qB}{m}$.

Ismétlés: Landau nívók

Szimmetrikus mérték: $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$, $\omega_L = \dfrac{qB}{m}$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_L}{2}\right)^2(x^2+y^2) - \frac{\omega_L}{2}L_z$$

vezessük be a szokásos módon az $a_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{x_0} + i\dfrac{p_x}{p_0}\right)$ és $a_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{y}{x_0} + i\dfrac{p_y}{p_0}\right)$ léptető operátorokat:

$$H = \hbar\frac{\omega_L}{2}\left(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1\right) - \frac{\hbar\omega_L}{2i}(a_x^+ a_y - a_y^+ a_x)$$

$$H = \left(a_x^+, a_y^+\right)\hbar\frac{\omega_L}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \hbar\frac{\omega_L}{2} = \hbar\frac{\omega_L}{2}A^+(\mathbb{1} - \sigma_y)A + \hbar\frac{\omega_L}{2}$$

ahol bevezettük az $A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $A^+ = (a_x^+, a_y^+)$ jelölést.

Ismétlés: Landau nívók

$$H = \hbar \frac{\omega_L}{2} A^+ (\mathbb{1} - \sigma_y) A + \hbar \frac{\omega_L}{2}$$

A $\mathbb{1} - \sigma_y$ mátrix diagonalizálásával szeparálhatjuk a Hamilton operátort. A sajátértékek: 1 és 0. Csak az 1 sajátérték ad járulékot az energiához, a 0 sajátértékhez tartozó léptető operátorok csak a sajátállapotot változtatják meg. Az energiát leolvashazjuk a Hamilton operátorról:

$$E_n = \hbar \omega_L \left(n + \frac{1}{2} \right) , a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y) , a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y)$$

$$\varphi_{nm} = \frac{1}{\sqrt{n! m!}} a_1^{+\,n} a_2^{+\,m} |0, 0\rangle$$

Klein-Gordon egyenlet homogén mágneses térben

Térjünk vissza a Klein-Gordon egyenlet megoldásához:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right) = \hbar\omega_L\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$E = \pm\sqrt{2mc^2\hbar\omega_L\left(n + \frac{1}{2}\right) + m^2c^4} = \pm mc^2\sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_L}{mc^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

Alacsony energiás határátmenetben visszakapjuk a klasszikus energiákat:

$$E - mc^2 \approx \hbar\omega_L\left(n + \frac{1}{2}\right)$$