Dirac egyenlet

Dirac mátrixok:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \gamma_0 \, , \quad \alpha_k = \gamma_0 \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

Dirac egyenlet:

$$\left(c\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + q\Phi + \beta mc^2 \right) \Psi = E\Psi$$

ahol $\mathbf{A}$ a vektorpotenciál, Φ a skalár potenciál és Ψ négy komponensű spinor.

Szabad részecske

Szabad részecske Dirac egyenlete:

$$H\Psi = \left(c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta mc^2\right)\Psi = E\Psi$$

$$\begin{pmatrix} mc^2 - E & c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & -(E + mc^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

Megmaradó mennyiség a helicitás: $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p} \Rightarrow [H, \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}] = 0$

$$\begin{aligned}[H, \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}] = & \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

Egy kis σ gimnasztika:

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l \ , \quad (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^2 = \sigma_j p_j \sigma_k p_k = (\mathbb{1}\delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l)p_j p_k = p_k p_k \mathbb{1} = \mathbf{p}^2\mathbb{1}$$

Szabad részecske

Keressük a szabad megoldást a következő alakban:

$$\Psi = e^{i\mathbf{kr}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

A Dirac egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{pmatrix} mc^2 - E & c\hbar\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} \\ c\hbar\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} & -(mc^2 + E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = 0$$

Fejezzük ki $\mathbf{v}$-t:

$$\mathbf{v} = \frac{c\hbar\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}}{mc^2 + E}\mathbf{u}$$

A pozitív energiás megoldásokra a nevező nagyobb, mint $2mc^2$, ezért $\mathbf{v}$-t kis komponensnek hívjuk.

$$(mc^2 - E)\mathbf{u} + c\hbar\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\mathbf{v} = (mc^2 - E)\mathbf{u} + \frac{(c\hbar\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})^2}{mc^2 + E}\mathbf{u} = 0$$

Szabad részecske

Az előző egyenletből:

$$m^2c^4 - E^2 + c^2\hbar^2\mathbf{k}^2 = 0 \,, \qquad E = \pm\sqrt{m^2c^2 + c^2\hbar^2\mathbf{k}^2}$$

Az $\mathbf{u}$ vektort válasszuk a $\boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}$ helicitás mátrix sajátvektorának, $\mathbf{w}$ legyen egy kétkomponensű vektor:

$$\boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}\left(\mathbb{1} \pm \boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\mathbf{w} = \pm\underbrace{\left(\mathbb{1} \pm \boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\mathbf{w}}_{\text{sajátvektor}} \,, \quad \mathbf{w}^T\left(\mathbb{1} \pm \boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\left(\mathbb{1} \mp \boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\mathbf{w} = 0$$

A szabad megoldás tehát:

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pm\frac{c\hbar k}{mc^2+E}\mathbf{u} \end{pmatrix} \,, \quad \mathbf{u} = \left(\mathbb{1} \pm \boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\mathbf{w}$$