Impulzusmomentumok összeadása

September 10, 2020

Ismétlés

- $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad [\mathbf{L}^2, L_i] = 0$
- $\mathbf{L}^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle, \quad L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$
  $l = 0, 1/2, 1, 3/2\ldots \;\; m = -l, \ldots l,$
- $L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l, m\pm 1\rangle$

Impulzusmomentumok összeadása

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2, \qquad \mathbf{J}^2 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)^2$$

Direktszorzat tér: $\{|l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle\}$ $(2l_1 + 1) \times (2l_2 + 1)$ dimenziós tér

$$J_z |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle = (L_{1z} + L_{2z} |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle = \hbar (m_1 + m_2) |l_1, m_1\rangle |l_1, m_1\rangle$$

$J_z = L_{1z} + L_{2z}$ operátornak sajátállapota $|l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle$ állapot $m_1 + m_2$ sajátértékkel.

$$\mathbf{J}^2 |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)^2 |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle \neq \alpha |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle$$

A $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)^2$ operátornak nem feltétlen sajátállapota $|l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle$ szorzat, de ezek linárkombinécójából előállítható:

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)^2 \sum_{m_1, m_2} c_{j,m;l_1,m_1,l_2,m_2} |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$

A lineárkombinációs együtthatókat nevezzük Clebsch-Gordan együtthatóknak.

$$|l_1 - l_2| \leq j \leq l_1 + l_2 \ , \qquad m = m_1 + m_2$$

Feles spinű részecskék

A He atomban két feles spinű elektron van. A Hamilton operátor felcserélhető az $S_z = s_{1z} + s_{2z}$ és $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2$ operátorokkal. Az S lehetséges értékei: $1/2 - 1/2 = 0$ és $1/2 + 1/2 = 1$. Az $|S, S_z\rangle = |1, 1\rangle$ és $|S, S_z\rangle = |1, -1\rangle$ állapotokat csak egyféleképpen állíthatjuk elő:

$$|1,1\rangle = |1/2, 1/2\rangle|1/2, 1/2\rangle \ , \qquad |1,-1\rangle = |1/2, -1/2\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

Alkalmazzuk az S_- operátort az $|1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle|1/2, 1/2\rangle$ állapotra:

$$S_-|1,1\rangle = (s_{1-} + s_{2-})|1/2, 1/2\rangle|1/2, 1/2\rangle$$

$$\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|1,0\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - (1/2(1/2-1)}{\color{red}|1/2, -1/2\rangle}|1/2, 1/2\rangle$$
$$+ \sqrt{1/2(1/2+1) - (1/2(1/2-1)}|1/2, 1/2\rangle{\color{red}|1/2, -1/2\rangle}$$

$$\sqrt{2}|1,0\rangle = |1/2, -1/2\rangle|1/2, 1/2\rangle + |1/2, 1/2\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

Tehát:

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2, -1/2\rangle|1/2, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2, 1/2\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

A két Clebsch-Gordan együttható: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Szingulett és triplet állapotok

Két feles spínú részecskéből összesen négy állapotot keverhetünk ki:

$S = 1$ háromszorosan degenerált triplet

$$|1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle$$
$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle$$
$$|1,-1\rangle = |1/2,-1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle$$

$S = 0$ egyszeresen degenerált szingulett

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle$$

Az $|1,0\rangle$ és $|0,0\rangle$ állapotok ugyanazokat a szorzatokat tertalmazzák de merőlegeseknek kell lenniük!

$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \qquad l_1 = 1\ , \qquad l_2 = 1/2$

j lehetséges értékei: $1 - 1/2 = 1/2$, $1 + 1/2 = 3/2$. A $|j_{max}, j_{max}\rangle$ és $|j_{max}, -j_{max}\rangle$ állapotokat mindíg egyértelműen tudjuk előállítani a szorzatokból: $|j_{max}, j_{max}\rangle = |l_1, l_1\rangle|l_2, l_2\rangle$ és $|j_{max}, -j_{max}\rangle = |l_1, -l_1\rangle|l_2, -l_2\rangle$. A mi esetünkben

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle\ , \qquad |3/2, -3/2\rangle = |1, -1\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

Az előzőekhez hasonlóan alkalmazzuk a léptető operátort az állapotokra:

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = (L_- + S_-)|1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle$$

$$\sqrt{3/2(3/2+1) - 3/2(3/2-1)}|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}{\color{red}|1, 0\rangle}|1/2, 1/2\rangle$$
$$+ \sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)}|1, 1\rangle{\color{red}|1/2, -1/2\rangle}$$
$$\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle + |1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = {\color{blue}\sqrt{\frac{2}{3}}}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle + {\color{blue}\frac{1}{\sqrt{3}}}|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

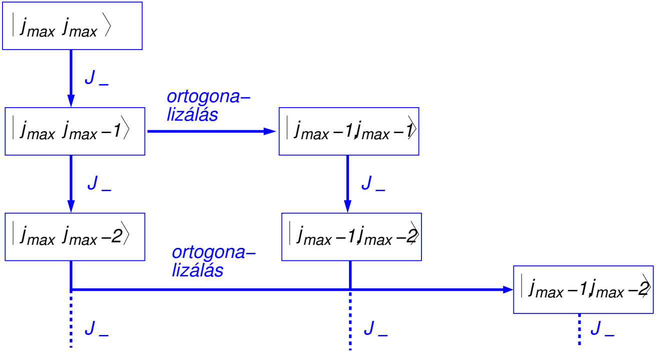
$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \qquad l_1 = 1\ , \qquad l_2 = 1/2$

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle$$

A $|1/2, 1/2\rangle$ állapot ugyanezeket a szorzatokat tertalmazza. Használjuk ki a két állapot ortogonalitását:

$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle$$

Algoritmus



$|j_{max}\ j_{max}\rangle$
J_-
ortogona–
lizálás
$|j_{max}\ j_{max}-1\rangle$
$|j_{max}-1\ j_{max}-1\rangle$
J_-
J_-
$|j_{max}\ j_{max}-2\rangle$
$|j_{max}-1\ j_{max}-2\rangle$
ortogona–
lizálás
$|j_{max}-1\ j_{max}-2\rangle$
J_-
J_-
J_-

Feladatok

1. Két $l = 1$ perdületű részecske gömbszimmetrikus potenciálban mozog. A teljes impulzus momentum megmaradó mennyiség. Mi lesz az L_{1z} operátor várható értéke az $|J, M\rangle = |1, 1\rangle$ állapotban?
2. Mi lesz a teljes impulzusmomentuma egy feles spinű és egy l pedületű részecskének? Határozzuk meg a Clebsch-Gordan együtthatókat! Használjuk a binomiális tételt a $J_- = L_- + S_-$ operátor hatványainak meghatározására! Mutassuk meg, hogy feles spinű részecske esetén $S_-{}^n = 0$, ha $n > 1$!