

Számítási módszerek a fizikában 2. ZH

Név:

Neptun kód:

1. Differenciál operátorok

- (a) Határozzuk meg a következő skalár terek gradiensét Descartes koordinátákban:

$$\Phi(\mathbf{r}) = xyz, \quad \Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r})$$

- (b) Határozzuk meg a következő vektortér divergenciáját és rotációját Descartes koordinátákban:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

- (c) Határozzuk meg a az előző vektortér rotációját henger koordináta rendszerben!

- (d) Írjuk fel a következő vektortereket henger és gömbi koordinátákban:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}e^{\mathbf{b}\mathbf{r}}$$

Az előző feladatokban $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ állandó vektorok.

Megoldások:

- (a)

$$\Phi(\mathbf{r}) = xyz, \quad \nabla\Phi = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}), \quad \nabla\Phi = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{r})$$

- (b)

$$\text{div} \mathbf{a} \times \mathbf{r} = \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_i} \epsilon_{ijk} a_j r_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j \delta_{ik} = 0$$

$$\text{rota} \times \mathbf{r}_i = \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \epsilon_{klm} a_l r_m = \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_l \delta_{jm} = \sum_{jl} (\delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jl}) a_l = 3a_i - a_i = 2a_i$$

$$\text{rota} \times \mathbf{r} = 2\mathbf{a}$$

- (c) Válasszuk a z tengelyt párhuzamosan az $\mathbf{a}$ vektorral:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a} = a \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r} = (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \times a \mathbf{e}_z = \rho a \mathbf{e}_\varphi, \quad V_\varphi = a\rho$$

A rotáció kifejezésében csak a V_φ -t tartalmazó tagokat kell figyelkembe vennünk:

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} V_\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} \right) = \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} a\rho + \frac{\partial a\rho}{\partial \rho} \right) = 2a \mathbf{e}_z$$

(d) Henger koordinátarendszerben:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{e}_\varphi$$

Válasszuk a z tengelyt párhuzamosan a $\mathbf{b}$ vektorral:

$$\mathbf{r} e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}} = (\rho \mathbf{e}_\varrho + z \frac{\mathbf{b}}{b}) e^{bz}$$

Gömbi koordinátarendszerben:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} r \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\varphi$$

A z tengely ismét párhuzamos $\mathbf{b}$ -vel:

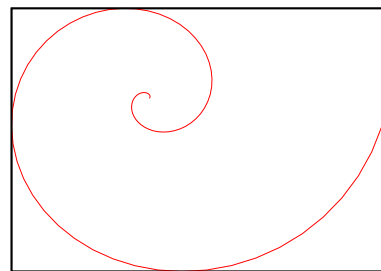
$$\mathbf{r} e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}} = r \mathbf{e}_r e^{br \cos(\vartheta)}$$

2. Vonal integrálok:

(a) Egy spirált az (x, y) síkban a következőképpen parametrizálhatunk hengerkoordinátákban:

$$\mathbf{r} = a\varphi^2 \mathbf{e}_\varrho$$

Ha egy l hosszúságú fonalat a spirál mentén φ_0 kezdőponttal lefektetünk, milyen messze lesz a vége az origótól?



(b) Mekkora lesz a mágneses tér az origóban, ha az előző spirálban I nagyságú áram folyik? Használjuk a Biot-Savart törvényt:

$$\mathbf{B} = \mu_0 I \int \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Megoldások:

(a) Az ívelemet $\mathbf{r}$ φ szerinti deriváltjával állíthatjuk elő:

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} d\varphi = (2a\varphi \mathbf{e}_\varrho + a\varphi^2) \mathbf{e}_\varphi d\varphi$$

Az ívelem hossza: $dl = \sqrt{4a^2\varphi^2 + a^2\varphi^4} d\varphi = a\varphi \sqrt{4 + \varphi^2} d\varphi$. Integráljuk φ_0 -tól φ_{max} -ig:

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_{max}} a\varphi \sqrt{4 + \varphi^2} d\varphi = \frac{a}{3} \left((4 + \varphi_{max}^2)^{3/2} - (4 + \varphi_0^2)^{3/2} \right)$$

Innen egyszerűen kifejezhetjük φ_{max} négyzetét:

$$\varphi_{max}^2 = \left(\frac{3l}{a} + (4 + \varphi_0^2)^{3/2} \right)^{2/3} - 4$$

A végpont távolsága az origótól: $r_{max} = a\varphi_{max}^2$.

(b) Határozzuk meg $d\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}$ kereszt szorzatát:

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{r}(2a\varphi\mathbf{e}_\varphi + a\varphi^2)\mathbf{e}_\varphi \times a\varphi^2\mathbf{e}_\varphi d\varphi = -a^2\varphi^4\mathbf{e}_z d\varphi$$

Helyettesítsük be a Biot-Savart törvénybe:

$$\int \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_{max}} \frac{a^2\varphi^4}{a^3\varphi^6} d\varphi = \frac{1}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_{max}} \frac{1}{\varphi^2} d\varphi = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi_{max}} \right)$$

3. Felületi integrálok és integrál tételek:

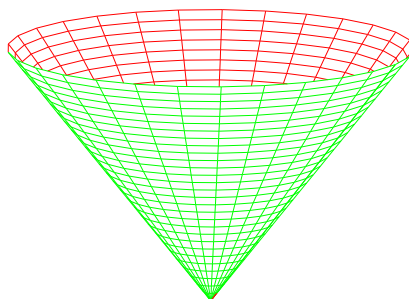
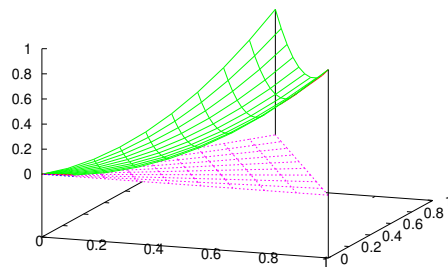
(a) Egy háromszög csúcsainak a koordinátái a következők: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
Parametrizáljuk a háromszög felületét!

(b) Írjuk fel a háromszög felett lévő $z = x^2 + y^2$ parabola felületét meghatározó integrált!

(c) Paraméterezzünk egy az origóból induló, egységnyi magasságú, $\pi/4$ nyílásszögű kúp körlappal lefedett felületét és határozzuk meg a $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ vektortér fluxusát a zárt felületre! Alkalmazhatjuk-e a Gauss tételt?

(d) A Gauss tétel segítségével mutassuk meg, hogy egy zárt felület által határolt tartomány térfogata:

$$V = \frac{1}{3} \oint \mathbf{r} d\mathbf{A}$$



Megoldások:

(a) A háromszög egy lehetséges paraméterezése:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)uv + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)u + \mathbf{r}_1 \\ x &= -\frac{1}{2}uv + u \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}uv \end{aligned}$$

(b) A parabola felülete:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}uv + u \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}uv \\ z &= x^2 + y^2 = u^2(v^2 - v + 1) \end{aligned}$$

A helyvektor paraméter szerinti parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ 2u(v^2 - v + 1) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u \\ u^2(2v - 1) \end{pmatrix}$$

A felület elem:

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}u^2(v - 2) \\ \frac{3}{2}vu^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u \end{pmatrix} du dv$$

Aparabola darab felülete:

$$A = \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{u^4(v - 2)^2 + 3u^4v^2 + u^2}$$

- (c) Feltételeztem, hogy a kúp nyílásszöge a palást függőlegessel bezárt szögével egyezik meg. Ekkor a kúp felületének egy lehetséges parametrizációja:

$$\mathbf{r}(z, \varphi) = z\mathbf{e}_\varrho + z\mathbf{e}_z,$$

ahol kihasználtam, hogy $\tan(\pi/4) = 1$. A kúpot lezáró körlap parametricációja:

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi) = \rho\mathbf{e}_\varrho + \mathbf{e}_z$$

A $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ vektortér párhuzamos a kúp palástjával ezért nem ad járulékot a fluxushoz, elegendő azt csak a fedőlapon meghatározni.

$$\Phi = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}} = -2\pi \left. \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}} \right|_0^1 = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Ezt az integrált a Gauss tétel segítségével is meg tudjuk határozni. Egészítsük ki a kúpot lezáró körlapot egy $\sqrt{2}$ sugarú gömb megfelelő darabjával. A vektortér divergenciája nulla az origón kívül, ezért a felületi integrál a gömb darabbal lefedett körlapon eltűnik, tehát számolhatjuk a fluxust a gömb darabon is:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin(\vartheta) d\vartheta = 2\pi(\cos(0) - \cos(\pi/4)) = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

- (d) Használjuk a Gauss tételt:

$$V = \frac{1}{3} \oint \mathbf{r} d\mathbf{A} = \frac{1}{3} \int \operatorname{div} \mathbf{r} dV = \frac{1}{3} \int 3dV = \int dV = V$$

Gömbi koordináta rendszer:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_{max}} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\vartheta \sin(\vartheta)) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left(\frac{\partial \sin(\vartheta) V_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

Henger koordináta rendszer:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(V_\rho + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$a \mathbf{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\rho \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} V_\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$