Számítási módszerek a fizikában 1. ZH

Név: **Neptun kód:**

---

1. **Elsőrendű differenciálegyenletek** 35 pont

   (a) Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet megoldását az $x(0) = 0$ kezdeti feltétellel:
   $$\dot{x}^2 - x = 1\,!$$

   (b) Egy tömegpontot nyugalomból τ ideig állandó P_0 teljesítménnyel gyorsítunk sebességgel arányos súrlódási erő jelenlétében. Határozzuk meg a sebességének az időfüggését!
   $$mv\dot{v} + \alpha v^2 = P_0\left(\Theta(t) - \Theta(t-\tau)\right)$$
   Segítség: Esetleg érdemes az $x = v^2$ új változót bevezetni!

   (c) Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet rendszer megoldását az $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ kezdőfeltételekkel:
   $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$
   Keressük a megoldást $\mathbf{x} = Ae^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + Be^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2$ alakban, ahol $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ az együttható mátrix saját vektorai!

Megoldások:

(a) $\dot{x}^2 - x = 1$, $x(0) = 0$. Fejezzük ki x deriváltját:
$$\dot{x} = \pm\sqrt{1+x}\,.$$
Ez egy egyszerű, szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelynek a megoldása:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int dt + C\text{ , az integrált elvégezve } 2\sqrt{1+x} = t + C$$
A differenciálegyenlet megoldása:
$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + C\right)^2 - 1$$
A kezdeti feltétel akkor teljesül, ha $C = 1$:
$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 - 1$$

(b) Bontsuk két részre a megoldást. Először tárgyaljuk a $t < \tau$ esetet. Ekkor a differenciálegyenlet a következő lesz:
$$mv\dot{v} + \alpha v^2 = P_0\,.$$
Többféleképpen is kereshetjük a megoldást.

I. Vezessük be az $x = v^2$ változót és írjuk fel a differenciálegyenletet az új változóval:

$$\frac{m}{2}\dot{x} + \alpha x = P_0 \ , \qquad \dot{x} + \frac{2\alpha}{m}x = \frac{2P_0}{m}$$

Ez egy egyszerű elsőrendű, inhomogén differenciálegyenlet, amelynek ismerjük a megoldási sémáját.

$$u(t) = e^{\frac{2\alpha}{m}t} \ , \quad x(t) = e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\int_0^t e^{\frac{2\alpha}{m}t'}\frac{2P_0}{m}dt' + Ce^{-\frac{2\alpha}{m}t}$$

Ügyeljünk az integrálási határokra: a motort $t = 0$-ban kapcsoltuk be és $t = \tau$ pillanatig működött, így az alsó határ 0 a felső határ pedig $t < \tau$ lesz. Elvégezve az integrált:

$$x(t) = e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\frac{P_0}{\alpha}\ e^{\frac{2\alpha}{m}t'}\Big|_0^t = \frac{P_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\right)$$

A kezdeti érték teljesítéséhez a C állandót nullának kell választanunk. A sebesség ennek a kifejezésnek a négyzetgyöke lesz:

$$v(t) = \sqrt{\frac{P_0}{\alpha}}\sqrt{1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}t}}$$

II. Használhatunk más stratégiát is a megoldáshoz:

$$mv\dot{v} + \alpha v^2 = P_0 \ , \qquad \dot{v} = \frac{P_0}{mv} - \frac{\alpha}{m}v \ ,$$

amely egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet:

$$\frac{dv}{\frac{P_0}{mv} - \frac{\alpha}{m}v} = dt \ , \qquad \int \frac{vdv}{\frac{P_0}{m} - \frac{\alpha}{m}v^2} = t + C$$

Az integrálás elvégezve a következő kifejezést kapjuk:

$$-\frac{m}{2\alpha}\ln\left(\frac{P_0}{m} - \frac{\alpha}{m}v^2\right) = t + C$$

$$\frac{P_0}{m} - \frac{\alpha}{m}v^2 = C'e^{-\frac{2\alpha}{m}t}$$

A kezdeti feltétel szerint $t = 0$ pillanatban $v = 0$, ezért $C' = \dfrac{P_0}{m}$. Az előző egyenletből kifejezve a sebességet a következő eredményt kapjuk:

$$v(t) = \sqrt{\frac{P_0}{\alpha}}\sqrt{1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}t}}$$

Most vizsgáljuk meg a $t > \tau$ esetet. Ebben az esetben kikapcsoltuk a motort és

$$m\dot{v} + \alpha v = 0$$

homogén differenciálegyenlet lesz a mozgásegyenlet. Ennek a megoldása: $v(t) = De^{-\frac{\alpha}{m}t}$. A megoldásnak folytonosnak kell lennie a $t = \tau$ pontban:

$$\sqrt{\frac{P_0}{\alpha}}\sqrt{1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}\tau}} = De^{-\frac{\alpha}{m}\tau}$$

innen $D = \sqrt{\dfrac{P_0}{\alpha}}\sqrt{e^{\frac{2\alpha}{m}\tau} - 1}$.

Összefoglalva a megoldásokat:

$$v(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{P_0}{\alpha}}\sqrt{1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}t}} & \text{ha} \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \sqrt{\frac{P_0}{\alpha}}\sqrt{e^{\frac{2\alpha}{m}\tau} - 1}e^{-\frac{\alpha}{m}t} & \text{ha} \quad t \geq \tau \end{cases}$$

(c) Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet rendszer megoldását az $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ kezdőfeltételekkel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

Írjuk fel a differenciálegyenletet mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Keressük meg a mátrix sajátértékeit! A mátrix karakterisztikus polinomja: $\lambda^2 + 1 = 0$, amelynek a gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm i$. A sajátvektoroknak a következő egyenleteket kell kielégíteni:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = 0 \;, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Két lehetséges, nem normált saját vektor:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \;, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

A megoldás, tehát, a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{x}(t) = Ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + Be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

A kezdőfeltételeknek megfelelően:

$$A + B = 1 \;, \qquad iA - iB = 1 \;,$$

ahonnan $A = \dfrac{1-i}{2}$, $B = \dfrac{1+i}{2}$.

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1-i}{2}e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1+i}{2}e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

Ha még szeretnénk szépítgetni az eredményt, felhasználhatjuk, hogy $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(t)\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(t)\cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t - \frac{\pi}{4}) \\ -\sin(t - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

2. **Másodrendű differenciálegyenletek** 35 pont

(a) Határozzuk meg a következő homogén differenciálegyenlet megoldását az $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

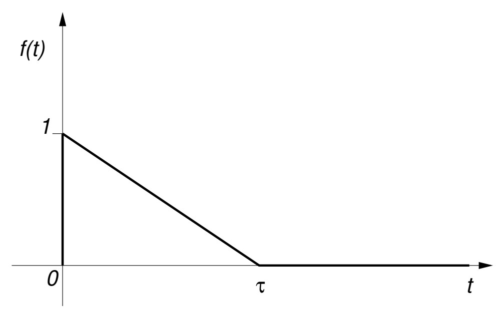
(b) Határozzuk meg az előző differenciálegyenlet Green függvényét valós térben és adjunk meg egy partikuláris megoldást a következő gerjesztésre:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t}\Theta(t)$$

Milyen határfeltételeket kell kirónunk a Green fügvény megszerkesztéséhez?

(c) Határozzuk meg az előző egyenlet Green függvényét Fourier térben és adjuk meg egy partikuláris megoldás Fourier transzformáltját a következő gerjesztés esetén:

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)(\Theta(t) - \Theta(t - \tau))$$



Mi lesz az $f(t)$ függvény második deriváltja és hogyan határozhatjuk meg segítségével a Fourier transzformáltját?

Megoldások:

(a) Határozzuk meg a következő homogén differenciálegyenlet megoldását az $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

Írjuk fel az egyenlet karakterisztikus polinomját: $\lambda^2+2\lambda+5 = 0$. A másodrendű polinom gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$$

A homogén egyenlet megoldását a gyököknek megfelelően kereshetjük a következő alakban:

$$x(t) = e^{-t}\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right)\ , \qquad x(0) = A$$

A függvény deriváltja:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -e^{-t}\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) + e^{-t}\left(-2A\sin(2t) + 2B\cos 0(2t)\right) \\
\dot{x}(0) &= -A + 2B
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltételeknek megfelelően: $A = 1$ és $B = 1/2$.

$$
x(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)
$$

(b) Határozzuk meg az előző differenciálegyenlet Green függvényét valós térben és adjunk meg egy partikuláris megoldást a következő gerjesztésre:

$$
\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t}\Theta(t)
$$

Milyen határfeltételeket kell kirónunk a Green fügvény megszerkesztéséhez?

A Green függvényt másodrendű, állandóegyütthatós differenciálegyenlet esetén az

$$
G(t,t') = g(t - t1)\ , \qquad g(t) = y_h(t)\Theta(t)
$$

alakban kereshetjük, ahol $y_h(t)$ homogén megoldás kielégíti az $y_h(0) = 0$, $y_h(0) = 1$ kezdeti feltételeket. Használjuk fel az előző feladat eredményeit:

$$
y_h(t) = x(t) = e^{-t}\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right)
$$

A kezdeti értékeknek megfelelően: $A = 0$ és $B = -1/2$, ennek megfelelően $g(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\Theta(t)$. A differenciálegyenlet Green függvénye:

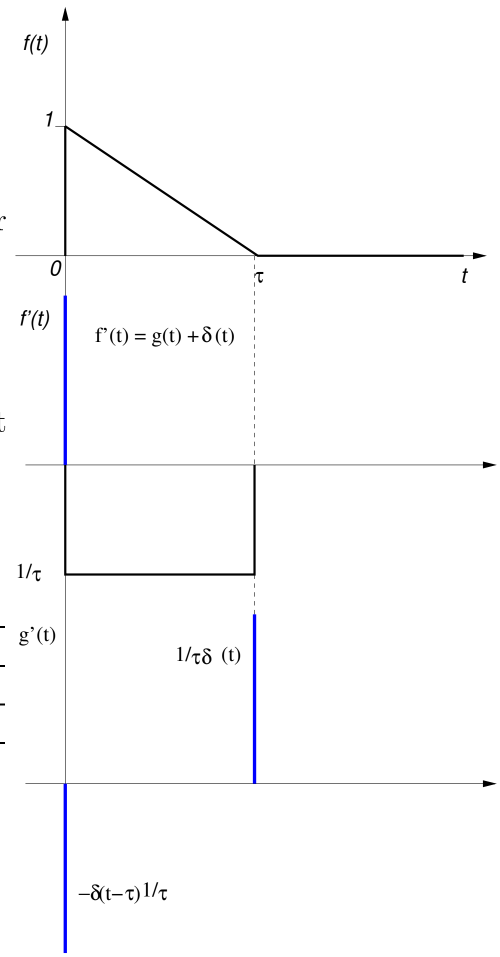
$$
G(t,t) = -\frac{1}{2}e^{-(t-t')}\sin(2(t-t'))\Theta(t-t')
$$

A partikuláris megoldást egy integrállal állíthatjuk elő:

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')e^{-t'}\Theta(t')dt' = \int_0^{\infty} G(t,t')e^{-t'}dt' \\
&= -\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-(t-t')}\sin(2(t-t'))\Theta(t-t')e^{-t'}dt' = \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t \sin(2(t-t'))dt' \\
&= -\frac{1}{4}e^{-t}\cos(2(t-t'))\big|_0^t = -\frac{1}{4}e^{-t}\left(1 - \cos(2t)\right)
\end{aligned}
$$

(c) Határozzuk meg az előző egyenlet Green függvényét Fourier térben és adjuk meg egy partikuláris megoldás Fourier transzformáltját a következő gerjesztés esetén:

$$
f(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\left(\Theta(t) - \Theta(t-\tau)\right)
$$



Írjuk át a

$$\ddot{g} + 2\dot{g} + 5g = \delta(t)$$

differenciálegyenletet Fourier térbe (Fourier transzformáljuk mindkét oldalát):

$$-\omega^2 G(\omega) + 2i\omega G(\omega) + 5G(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

A Green függvény Fourier transzformáltját könnyen kifejezhetjük:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega + 5}$$

Egy partikuláris megoldás Fourier transzformáltjához ezt a Green függvényt kell beszoroznunk a gerjesztés Fourier transzformáltjával. Ehhez határozzuk meg a Fourier transzformáltat:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i\omega} \left(1 - e^{-i\omega\tau}\right) - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau t e^{-i\omega t} dt$$

Integráljuk parciálisan a második tagot:

$$\int_0^\tau t e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} \left. t e^{-i\omega t} \right|_0^\tau - \frac{1}{i\omega} \int_0^\tau e^{-i\omega t} dt = -\frac{\tau}{i\omega} e^{-i\omega\tau} + \frac{1}{\omega^2} \left(e^{-i\omega\tau} - 1\right)$$

Helyettesítsük vissza a parciális integrál eredményét:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{i\omega} \left(1 - e^{-i\omega\tau}\right) + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega\tau} - \frac{1}{\tau\omega^2} \left(e^{-i\omega\tau} - 1\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{i\omega} - \frac{1}{\tau\omega^2} \left(e^{-i\omega\tau} - 1\right) \right) \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás Fourier transzformáltja tehát:

$$y_p(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega + 5} \left(\frac{1}{i\omega} + \frac{1}{\tau\omega^2} \left(e^{-i\omega\tau} - 1\right) \right)$$

Aki ódzkodik az integrál elvégzésétől, az a gerjesztés Fourier transzformáltját a deriváltakra vonatkozó szabályok segítségével is kiszámíthatja. A fenti ábrán az $f(t)$ függvény első és második deriváltját ábrázoltuk. Az $f(t)$ deriváltja

$f'(t) = \delta(t) + g(t)$, ahol $g(t) = \frac{1}{\tau}\left(\theta(t-\tau) - \Theta(t)\right)$. A $g(t)$ függvény deriváltja két Dirac delta összege lesz: $g'(t) = \frac{1}{\tau}(\delta(t-\tau) - \delta(t))$. A $g'(t)$ függvény Fourier transzformáltja $\frac{1}{\tau}\frac{1}{2\pi}(e^{-i\omega\tau} - 1)$ lesz, tahát $g(t)$ Fourier traszformáltja

$$\mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{i\omega}\frac{1}{\tau}\frac{1}{2\pi}(e^{-i\omega\tau} - 1)$$

Hasonlóan $f'(t)$ Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \mathcal{F}[g(t)] + \mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{i\omega}\frac{1}{\tau}\frac{1}{2\pi}(e^{-i\omega\tau} - 1) + \frac{1}{2\pi}$$

Végül $f(t)$ Fourier transzformáltját $i\omega$ faktorral való osztás után kapjuk:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\omega} - \frac{1}{\tau\omega^2}\left(e^{-i\omega\tau} - 1\right)\right) ,$$

amely eredmény megegezik (szerencsére) az integrálással kapott eredménnyel.

3. **Fourier transzformáció:** 30 pont

Számoljuk ki a következő függvények Fourier-transzformáltját!

(a) $f(t) = e^{-\alpha t}\Theta(t)$

(b) $f(t) = e^{-\alpha(t-\tau)}\theta(t-\tau)$

(c) $f(t) = e^{-2\alpha t}\Theta(t)$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t}\Theta(t)e^{i\omega_0 t}$

Megoldások:

(a)

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t}\Theta(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-(\alpha+i\omega)t}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + i\omega}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0$.

(b) $f(t) = e^{-\alpha(t-\tau)}\theta(t-\tau)$ az előző függvény τ-val való eltoltja:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + i\omega}e^{-i\omega\tau}$$

(c) Ez a függvény az eredeti átskálázott verziója:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + i\frac{\omega}{2}}$$

(d) Ebben az esetben az eredeti függvény Fourier transzformáltja és az $e^{i\omega_0 t}$ függvény Fourier transzformáltjának a konvolúciója lesz a megoldás:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = \delta(\omega - \omega_0)$$
$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha + i(\omega - \omega')}\delta(\omega' - \omega_0)d\omega'$$

Az integrálás során ω' helyére mindenütt ω_0 kerül:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + i(\omega - \omega_0)}$$

Hasznos összefüggések:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}[f(t+\tau)] = e^{i\omega\tau}F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|}F(\frac{\omega}{\alpha})$$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\int f(t)dt] = \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega')G(\omega')d\omega'$$

$$u(t) = e^{\int p(t')dt'}\ , \qquad x(t) = \frac{1}{u(t)}\int u(t')q(t')dt' + \frac{C}{u(t)}$$

Kérem, hogy ne dolgozzanak gyűrött, füzetből kitépett lapon! A dolgozatot ne hajtsák félbe!

Jó munkát!