

Számítási módszerek a fizikában 2. ZH

Név:

Neptun kód:

1. Differenciál operátorok

- (a) Tekintsük a következő 3×3 -as mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a $\Phi = \mathbf{r} \mathbf{A} \mathbf{r}$ skalár tér gradiensét!

Megoldás

A gradiens i -ik komponense:

$$(\nabla \Phi)_i = \frac{\partial}{\partial r_i} \sum_{j,k} r_j A_{jk} r_k = \sum_{j,k} (\delta_{ij} A_{jk} r_k + r_j A_{jk} \delta_{ik}) = \sum_j (A_{ij} + A_{ji}) r_j.$$

Behelyettesítve a mátrixot:

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix}$$

- (b) Határozzuk meg a $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} e^{\mathbf{k} \mathbf{r}}$ vektortér divergenciáját, ahol $\mathbf{k}$ egy állandó vektor!

Megoldás

$$\text{div} \mathbf{V} = \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} r_i e^{\mathbf{k} \mathbf{r}} = \sum_i \left(\delta_{ii} e^{\mathbf{k} \mathbf{r}} + r_i \frac{\partial}{\partial r_i} e^{\mathbf{k} \mathbf{r}} \right)$$

Számítsuk ki a második tagot:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} e^{\mathbf{k} \mathbf{r}} = k_i e^{\mathbf{k} \mathbf{r}}$$

A divergencia tehát:

$$\text{div} \mathbf{V} = \sum_i \left(\delta_{ii} e^{\mathbf{k} \mathbf{r}} + r_i k_i e^{\mathbf{k} \mathbf{r}} \right) = (3 + \mathbf{r} \mathbf{k}) e^{\mathbf{k} \mathbf{r}}$$

- (c) Írjuk fel a $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r}$ vektortér V_ρ , V_φ és V_z komponenseit henger koordináta rendszerben és határozzuk meg a rotációját!

Megoldás

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad V_\rho = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Henger koordináta rendszerben csak a középső, $\mathbf{e}_\varphi$ tag ad járulékot:

$$\text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\rho z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \frac{\rho z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) = 0$$

Egyébként $\frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla r$, mivel egy skalár tér gradiensének a rotációja nulla, ezért ennek a térnek a rotációja is eltűnik.

- (d) Határozzuk meg a vektortér divergenciáját gömbi koordináta rendszerben! **Megoldás**
A vektortér gömbi koordináta rendszerben:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{r}{r} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r, \quad V_r = 1, \quad V_\theta = v_\varphi = 0$$

Csak az első tag ad járulékot:

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) = \frac{2}{r}$$

2. Vonalminti integrálok

- (a) Egy logartimikus spirált a következőképpen parametrizálunk:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_0(1+t) \cos(\varphi) \\ r_0(1+t) \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi = a \ln(1+t), \quad t \in [0 : 1]$$

- a.) Milyen hosszú a spirál?

Megoldás:

$$l = \int dl = \int_0^1 |\dot{\mathbf{r}}| dt$$

Vezessük be a henger koordináta rendszer két egységvektorát:

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a vektor deriváltját:

$$\dot{\mathbf{r}} = r_0 \mathbf{e}_\varrho + r_0(1+t) \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{1+t}$$

így

$$\dot{\mathbf{r}} = r_0 \mathbf{e}_\varrho + r_0(1+t) \frac{a}{1+t} \mathbf{e}_\varphi = r_0 \mathbf{e}_\varrho + r_0 a \mathbf{e}_\varphi$$

Az ívelem hossza:

$$dl = r_0 \sqrt{1+a^2} dt$$

a drót hossza pedig $l = r_0 \sqrt{1+a^2}$.

- b.) A spirál alakú huzalnak m a tömege. Határozzuk meg az origón áthaladó, a z iránnyal párhuzamos tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát! Egy kicsiny huzal-darab tehetetlenségi nyomatéka $\Delta\Theta = \Delta m r^2$, ahol r a tengelytől mért távolság.

Megoldás:

A tehetetlenségi nyomaték a következő integrállal határozható meg a mi esetünkben:

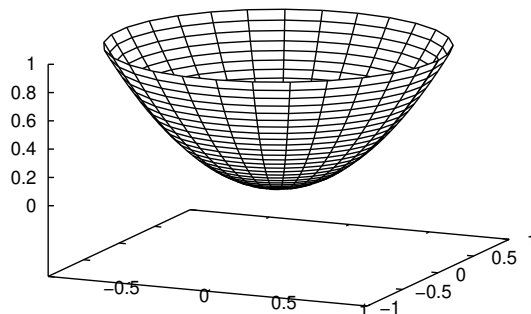
$$\Theta = \int m \frac{dl}{l} r^2 = \int_0^1 \frac{m}{r_0 \sqrt{1+a^2}} r_0^2 (1+t)^2 r_0 \sqrt{1+a^2} dt = \int_0^1 m r_0^2 (1+t)^2 dt = \frac{7}{3} m r_0^2$$

3. Felületi integrálok

Az ábrán látható felületet a következőképpen parametrizálhatjuk:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$$u \in [0 : 1] , \quad v \in [0 : 2\pi]$$



- (a) Határozzuk meg a felület nagyságát!

Megoldás:

A felület elemet kifejezhetjük a felületet meghatározó $\mathbf{r}(u, v)$ vektor parciális deriváltjaival:

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos(v) \\ -2u^2 \sin(v) \\ u \cos^2(v) + u \sin^2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos(v) \\ -2u^2 \sin(v) \\ u \end{pmatrix}$$

A felületelem és annak nagysága tehát:

$$d\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos(v) \\ -2u^2 \sin(v) \\ u \end{pmatrix} du dv, \quad dA = u \sqrt{1 + 4u^2} du dv$$

A felület nagyságát a következő integrállal határozhatjuk meg:

$$A = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 du u \sqrt{1 + 4u^2} = 2\pi \frac{1}{12} (1 + 4u^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1)$$

- (b) Mekkora felhajtó erő hat rá, ha a pereméig vízbe merítjük?

Megoldás:

A felület pereme a $z = 1$ magasságban van. A hidrosztatikai nyomás ennek megfelelően: $p = \rho g(1 - z)$ lesz. u -val paraméterezve a felületen: $p = \rho g(1 - u^2)$. Integráljuk a hidrosztatikai nyomást a felületre:

$$\mathbf{F}_f = \int p d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 du \rho g(1 - u^2) \begin{pmatrix} -2u^2 \cos(v) \\ -2u^2 \sin(v) \\ u \end{pmatrix}$$

A felhajtó erő x és y komponense eltűnik, hiszen $\cos(v)$ és $\sin(v)$ teljes periódusra vett integrálja nulla. A vártan megfelelően csak a z komponens nem tűnik el:

$$F_{fz} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 du \rho g(1 - u^2) u du = \rho g \frac{\pi}{2}$$

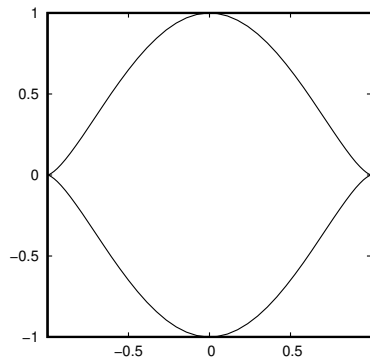
4. Integrál tételek alkalmazása

(a) Az alábbi ábrán látható zárt görbét a következőképpen parametrizálhatjuk:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0 : 2\pi]$$

I.) Számítsuk ki a görbe által határolt területet a Stokes tétel segítségével!

II.) Paraméterezzük a görbe által határolt felületet!



Megoldás:

I.) Írjuk fel a Stokes tételt a görbe által bezárt felületre:

$$\oint \mathbf{V} d\mathbf{r} = \int \text{rot } \mathbf{V} d\mathbf{A}$$

Vektortérnek válasszunk egy olyan teret, amely rotációja egy z irányú egységvektor. (Lásd a dolgozat végén szereplő vektorteret.)

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{e}_z$$

Ebben az esetben a baloldalon szereplő integrál a görbe által bezárt területet adja. Természetesen a vektorteret a görbén kell értelmeznünk:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin^3(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

A vonalmenti integrálhoz meg kell határoznunk a $d\mathbf{r}$ vektort:

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 3\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} dt$$

Integrálnunk kell $\mathbf{V}$ és $d\mathbf{r}$ skalárszorzatát:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^4(t) + 3\sin^2(t)\cos^2(t)) dt$$

A dolgozat végén megtaláljuk $\sin^4(t)$ kifejtését, csak a másik taggal kell kezdenünk valamit:

$$3\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{3}{4}\sin^2(2t) = \frac{3}{8}(1 - \cos(4t))$$

Az integrálás során a $\cos$ tagok nem adnak járulékot: $A = \frac{3}{4}\pi$.

II.) A görbét különbözőképpen parametrizálhatjuk. Egy lehetséges paraméterezés során kössük össze az origót a görbe egy pontjával egy egyenessel. Az egyenes egyenlete $\mathbf{r}(u, t) = u\mathbf{r}(t)$, amely egyuttal a felületet is paraméterezi.

- (b) Helyezzünk el egy ponttöltést a $(0, 0, -z_0)$ pontban. Adjuk meg a ponttöltés keltette elektromos teret henger koordinátákban. Határozzuk meg a 3 feladatban szereplő felületre az elektromos tér fluxusát a Gauss tétel segítségével!

Megoldás:

A ponttöltés elektromos tere:

$$\mathbf{E} = kQ \frac{\mathbf{r} + z_0 \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} + z_0 \mathbf{e}_z|^3}$$

Érdemes henger koordináta rendszerben számolni:

$$\mathbf{E} = kQ \frac{\rho \mathbf{e}_\rho + z_0 \mathbf{e}_z}{\left(\sqrt{\rho^2 + z_0^2}\right)^3}$$

Ennek a vektortérnek nulla a divergenciája a ponttöltésen kívül, ezért a körlappal lezárt felületre a fluxusnak el kell tűnnie. Elegendő, tehát a fluxust a lezáró körlapra meghatározni. A körlapon a felületelem $d\mathbf{A} = \rho d\rho d\varphi \mathbf{e}_z$.

$$\mathbf{E} d\mathbf{A} = kQ \frac{z_0 \rho}{\left(\sqrt{\rho^2 + z_0^2}\right)^3} d\rho d\varphi$$

A teljes fluxus:

$$\Phi = kQ \int_0^{2\pi} \int_0^1 d\rho \frac{z_0 \rho}{\left(\sqrt{\rho^2 + z_0^2}\right)^3} = -2\pi kQ \frac{z_0}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \Big|_0^1 = 2\pi kQ \left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{1 + z_0^2}}\right)$$

Segítség:

Gömbi koordináta rendszer:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\vartheta \sin(\vartheta)) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left(\frac{\partial \sin(\vartheta) V_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

Henger koordináta rendszer:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(V_\rho + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \mathbf{e}_\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} V_\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin^4(\alpha) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(4\alpha) \right)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_z$$

Kérem, ne hajtsák össze a dolgozatokat! Jó munkát!

Udvardi László