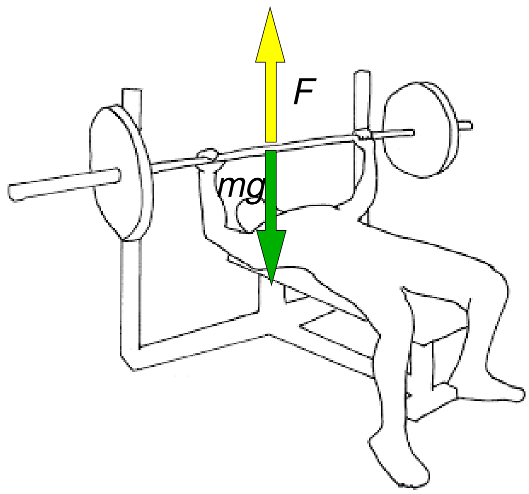
Gradiens, divergencia, rotáció

1. Gradiens



A súlyemelő $\mathbf{F}^s$ erőt fejt ki a súlyra. Egy kicsiny $\Delta\mathbf{s}$ távolsággal megemelve $\Delta W = \Delta\mathbf{s}\cdot\mathbf{F}^s$ munkát végez a súlyon, amely a test potenciális energiáját növeli. Egyrészt:

$$\Delta W = \Delta\mathbf{s}\cdot\mathbf{F}^s = \Delta s_x F_x^s + \Delta s_y F_y^s + \Delta s_z F_z^s \ ,$$

másrészt:

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial x}\Delta s_x + \frac{\partial W}{\partial y}\Delta s_y + \frac{\partial W}{\partial z}\Delta s_z$$

A két sort összevetve:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = F_x^s, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = F_y^s, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = F_z^s \ .$$

A testre mg erő hat, amely éppen minusz egyszerese a súlyemelő által kifejtett erőnek, tehát a potenciális energia hely szerinti parciális deriváltjai a testre ható erő minusz egyszeresét adják:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -F_x, \qquad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y, \qquad \frac{\partial E_p}{\partial z} = -F_z$$

Az előző egyenletben szereplő differenciál operátort **gradiensnek** hívjuk. Általánosságban ha van egy $f\ \ \mathcal{R}^n \longmapsto \mathcal{R}$ fügvénny, akkor az n-dimenziós gradiensének az i-dik komponense $\frac{\partial f}{\partial r_i}$. A gradiensre a következő jelölések használatosak:

$$\mathrm{grad} f, \qquad \nabla f, \qquad \mathrm{grad} f_i = \frac{\partial f}{\partial r_i}, \qquad \mathrm{grad} f_i = \partial_i f$$

1.1. Pédák

- $\nabla\mathbf{r}^2 = ?$

$$\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z} = 2z$$

Tehát $\nabla\mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r}$. Kiszámíthatjuk indexes módon is:

$$(\nabla\mathbf{r}^2)_i = \frac{\partial}{\partial r_i}\sum_{j=1}^{3} r_j^2 = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial r_j^2}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^{3} 2r_j\delta_{ij} = 2r_i$$

- $\nabla r = ?$

$$\frac{\partial\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\partial x} = 2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{x}{r}$$
$$\frac{\partial\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\partial y} = 2y\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{y}{r}$$
$$\frac{\partial\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\partial z} = 2z\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{z}{r}$$

Tehát $\nabla r = \mathbf{r}/r$. Határozzuk meg indexesen is:

$$(\nabla r)_i = \frac{\partial}{\partial r_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{3} r_j^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3} r_j^2}}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial r_j^2}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{r_j\delta_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3} r_j^2}} = \frac{r_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3} r_j^2}} = \frac{r_i}{r}$$

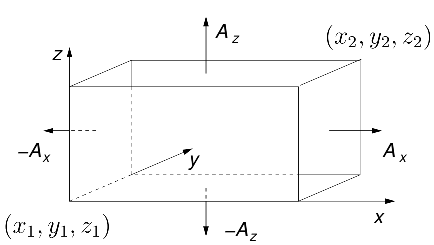
- $\nabla 1/r = ?$
  Használjuk fel az előző eredményeket:

$$(\nabla\frac{1}{r})_i = \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial r_i} = -\frac{1}{r^2}\frac{r_i}{r} = -\frac{r_i}{r^3}$$

Vektoros jelöléssel: $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

2. Divergencia

Tekintsünk egy kicsiny, téglatest alakú tartományt, amelyen állandó sűrűségű folyadék folyik keresztül:



Számítsuk ki az egyes oldalakon egységnyi idő alatt átfolyó folyadák mennyiségét. Jelölje $V_x(x,y,z)$, $V_y(x,y,z)$, $V_z(x,y,z)$ a folyadék sebességét az(x,y,z) pontban:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta m}{\Delta t} &= \rho(V_x(x_2,y,z)dydz - V_x(x_1,y,z))dydz \\ &+ \rho(V_y(x,y_2,z)dydz - V_y(x,y_1,z))dxdz \\ &+ \rho(V_z(x,y,z_2)dydz - V_z(x,y,z_1))dxdy \end{aligned}$$

A sebességek különbségét közelítsük a hely szerinti parciális deriváltak segítségével:

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\,dydz + \rho\frac{\partial V_y}{\partial y}dy\,dxdz + \rho\frac{\partial V_z}{\partial z}dz\,dxdy = \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

Tehát

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho\frac{\partial V_y}{\partial y} + \rho\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0\ ,$$

ahol $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = \lim_{\Delta\to 0} \dfrac{\Delta m/\Delta V}{\Delta t}$. A $\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}$ mennyiséget a $\mathbf{V}$ vektortér divergenciájának nevezzük:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nabla\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial r_i}$$

Ha bevezetjük a $\mathbf{j} = \rho\mathbf{V}$ áramsűrűséget, akkor az előző egyenletből az úgy nevezett kontinuitási egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0\ .$$

2.1. Példák

- $\operatorname{div}\mathbf{r} = ?$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r_i}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^{3} 1 = 3$$

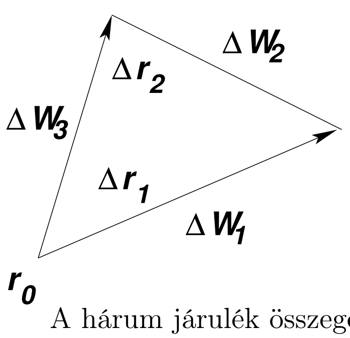
- $\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3) = ?$

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{r_i}{r^3} = \sum_{j=1}^{3}\left(\delta_{ii}\frac{1}{r^3} - r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - \sum_{i=1}^{3} r_i \frac{3}{r^4}\frac{\partial r}{\partial r_i} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\sum_{i=1}^{3} r_i\frac{r_i}{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

A fenti számolás során ki kell kötnünk, hogy $r \neq 0$. Az $r = 0$ pontban valami érdekes történik, amelyre később még visszatérünk.

3. Rotáció

Tekintsünk egy kicsiny háromszöget, amelynek egyik csúcs az $\mathbf{r}_0$ pontban van, a csúccsal szomszédos oldali pedig $\Delta\mathbf{r}_1$ és $\Delta\mathbf{r}_2$ kicsiny vektorok. Számítsuk ki a munkát abban az esetben, ha körbe viszünk egy tömegpontot a háromszög mentén!



Közelítsük a háromszög 1, 2, 3 oldalai mentén a munkát a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\Delta W_1 &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_1)\right)\Delta\mathbf{r}_1 \\
\Delta W_2 &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_2)\right)(\Delta\mathbf{r}_2 - \Delta\mathbf{r}_1) \\
\Delta W_3 &= -\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_2)\right)\Delta\mathbf{r}_2
\end{aligned}$$

A hárum járulék összegére a követkeő egyenletet kapjuk:

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 = \frac{1}{2}\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)\left(\Delta\mathbf{r}_1 - \Delta\mathbf{r}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_1)\Delta\mathbf{r}_2 - \mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_2)\Delta\mathbf{r}_1\right)$$

Használjuk ki, hogy $\Delta\mathbf{r}_1$ és $\Delta\mathbf{r}_2$ infinitezimálisan kicsiny vektorok és fejtsük sorba az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőt $\mathbf{r}_0$ körül:

$$F_i(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_1) = V_i(\mathbf{r}_0) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial r_j} r_{1j} \ ,$$

így a munkát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial F_i}{\partial r_j} r_{1j} r_{2i} - \frac{\partial F_i}{\partial r_j} r_{2j} r_{1i} \right) \ .$$

Cseréljük fel a második tagban az indexeket:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_i}{\partial r_j} - \frac{\partial F_j}{\partial r_i} \right) r_{1j} r_{2i} \ .$$

Az előző egyenletben a $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ derivált tenzorának az antiszimmetrikus része szerepel. Tudjuk, hogy egy 3×3-as antiszimmetrikus mátrixszal való szorzást felfoghatunk úgy is, mint egy alkalmas vektorral való kereszt szorzást:

$$\underline{\underline{A}}\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} \ .$$

Minden mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \right)$$

Ismételjük át, hogy hogyan azonosíthatjuk az $\mathbf{a}$ vektor komponenseit:

$$\begin{pmatrix} a_y r_z - a_z r_y \\ a_z r_x - a_x r_z \\ a_x r_y - a_y r_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Térjünk vissza a körintegrálhoz! A deriválttenzor antiszimmetrikus részét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_x}{\partial r_y} - \frac{\partial F_y}{\partial r_x} & \frac{\partial F_x}{\partial r_z} - \frac{\partial F_z}{\partial r_x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial r_x} - \frac{\partial F_x}{\partial r_y} & 0 & \frac{\partial F_y}{\partial r_z} - \frac{\partial F_z}{\partial r_y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial r_x} - \frac{\partial F_x}{\partial r_z} & \frac{\partial F_z}{\partial r_y} - \frac{\partial F_y}{\partial r_z} & 0 \end{pmatrix}$$

Az antiszimmetrikus tenzorhoz tartozó vektor komponenseket hívjuk az $F(\mathbf{r})$ erőtér rotációjának:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial r_y} - \frac{\partial F_y}{\partial r_z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial r_z} - \frac{\partial F_z}{\partial r_x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial r_x} - \frac{\partial F_x}{\partial r_y} \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\mathbf{F} \ .$$

A háromszög körbejárása során végzett ΔW munkát a következőképpen kaphatjuk meg

$$\Delta W = \frac{1}{2} (\mathrm{rot}\mathbf{F} \times \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_2 = \mathrm{rot}\mathbf{F} \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \mathrm{rot}\mathbf{F} \Delta\mathbf{A} \ ,$$

alakú lesz, ahol kihasználtuk a hármasszorzat tulajdonságait. Az $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$ keresztszorzata éppen a háromszög területével egyezik meg: $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \Delta\mathbf{A}$. Ha nincs surlódás, akkor a munka nullával egyezik meg – azt mondjuk, hogy az erőtér rotáció mentes. A rotációt felírhatjuk a Levi-Civita szimbólum segítségével is:

$$(\text{rot}\mathbf{F})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial r_j}$$

3.1. Példák

- $\text{rot}\mathbf{r} = ?$

$$\text{rot}\mathbf{r} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial r_k}{\partial r_j} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} d_{jk} = 0$$

- $(\text{rot}\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = ?$, ahol $\mathbf{n}$ egy állandó vektor

$$\begin{aligned}(\text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{r}))_i &= \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{klm} n_l r_m = \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{klm} n_l \frac{\partial r_m}{\partial r_j} \\ &= \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{klm} n_l \delta_{mj} = \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{kl} \epsilon_{klj} n_l \\ &= (\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl}) n_l = 3n_i - n_i = 2n_i\end{aligned}$$

4. Gradiens rotációja, rotáció divergenciája

Alkalmazhatjuk a differenciál operátorokat egymás után is. Először vizsgáljuk meg egy olyan vektortér rotációját, amelyett egy skalár tér gradienseként kaptunk:

$$(\text{rot}(\text{grad} f(\mathbf{r})))_i = \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial r_k} = \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial r_k \partial r_j} \, .$$

A Young tétel értelmében a második deriváltban a deriválás sorrendje felcserélhető, vagyis a második derivált tenzor szimmetrikus. Írjuk fel az előző egyenletet úgy hogy felcseréljük az összegzés sorrendjét, vagyis felcseréljük az k és l indexeket:

$$\begin{aligned}(\text{rot}(\text{grad} f(\mathbf{r})))_i &= \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial r_k \partial r_j} \\ (\text{rot}(\text{grad} f(\mathbf{r})))_i &= \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ikj} \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_k} = -\sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial r_k \partial r_j} \, ,\end{aligned}$$

A két egyenlet szerint $(\text{rot}(\text{grad} f(\mathbf{r})))_i = -(\text{rot}(\text{grad} f(\mathbf{r})))_i$, ami csak akkor teljesülhet, ha $(\text{rot}(\text{grad} f(\mathbf{r})))_i = 0$. Tehát egy skalár tér gradiensének a rotációja nulla.

Másodszor vizsgáljunk egy olyan vektortér divergenciáját, amelyet egy másik vektortér rotációjaként állítottunk elő:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial r_j} = \sum_{i,j,k}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_k}{\partial r_j \partial r_i} \ .$$

Az előzőekhez hasonlóan cseréljük fel az i és j indexeket:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) = \sum_{i,j,k}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_k}{\partial r_j \partial r_i} = \sum_{i,j,k}^{3} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 F_k}{\partial r_i \partial r_j} = -\sum_{i,j,k}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_k}{\partial r_j \partial r_i} = -\,\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) \ ,$$

tehát annak a vektortérnek a diveregenciája, amelyet egy másik vektortér rotációjaként kaptunk eltünik!