

Számítási módszerek a fizikában 1. ZH

Név:

Neptun kód:

1. Elsőrendű differenciálegyenletek

35 pont

(a) Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet az $y(0) = 0$ kezdeti feltétellel:

$$\operatorname{ch}(t)\dot{y} + \operatorname{sh}(t)y = e^{-t}$$

Megoldás:

Hozzuk standard alakra az egyenletet és osszuk el mindkét oldalt $\operatorname{ch}(t)$ -vel.

$$\dot{y} + \operatorname{th}(t)y = \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}(t)}.$$

Az $u(t)$ segédfüggvény a következő lesz:

$$u(t) = e^{\int \operatorname{th}(t) dt} = e^{\ln(\operatorname{ch}(t))} = \operatorname{ch}(t)$$

A megoldást egy integrállal állíthatjuk elő:

$$y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \int \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(t) dt + \frac{C}{\operatorname{ch}(t)} = -\frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}(t)} + \frac{C}{\operatorname{ch}(t)}$$

A C állandót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg: $y(0) = 0$. A megoldás tehát:

$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{\operatorname{ch}(t)}.$$

Gondolkodhatunk másképpen is! Vegyük észre, hogy a differenciálegyenlet bal oldalát egy szorzat függvény deriváltjaként is felírhatjuk:

$$\operatorname{ch}(t)\dot{y} + \operatorname{sh}(t)y = \frac{d}{dt}(\operatorname{ch}(t)y) = e^{-t}$$

Ebből az egyenletből integrálással kaphatjuk meg a megoldást:

$$\operatorname{ch}(t)y = \int e^{-t} dt + C = -e^{-t} + C,$$

vagyis

$$y(t) = \frac{C - e^{-t}}{\operatorname{ch}(t)}$$

(b) Mi lesz az előző egyenlet Green függvénye?

Megoldás:

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek Green függvényét a következőképpen állíthatjuk elő:

$$G(t, t') = e^{-\int_{t'}^t \text{th}(x) dx} \Theta(t - t') = \frac{\text{ch}(t')}{\text{ch}(t)} \Theta(t - t')$$
$$-\int_{t'}^t \text{th}(x) dx = \ln(\text{ch}(t')) - \ln(\text{ch}(t)) = \ln\left(\frac{\text{ch}(t')}{\text{ch}(t)}\right)$$

(c) Egy m tömegű részecske $U = \frac{\alpha}{x^2}$ alakú potenciálban mozog. Az energiája $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2}$. Fejezzük ki a sebességet a hely függvényében és oldjuk meg az így adódó első rendű differenciálegyenletet!

Megoldás:

Fejezzük ki a hely deriváltját az energiából:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\alpha}{x^2}\right)}$$

Ez egy szétválsztható változójú differenciálegyenlet:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\alpha}{x^2}\right)}} = \int dt + C$$

Az integrálás elvégzéséhez csempésszük a számlálóba x -et:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\alpha}{x^2}\right)}} = \int \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{m} (Ex^2 - \alpha)}} dx = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} (Ex^2 - \alpha) = \sqrt{\frac{m}{2E} x^2 - \frac{m\alpha}{2E^2}}$$

Tehát

$$\sqrt{\frac{m}{2E} x^2 - \frac{m\alpha}{2E^2}} = t + C$$

Könnyen kifejezhetjük a hely változót az előző egyenletből:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m} (t + C)^2 + \frac{\alpha}{E}}$$

Néhány megjegyzés a megoldáshoz:

Az eredeti mozgásegyenlet egy másodrendű differenciál egyenlet, amelynek két kezdő feltétele van: x_0 és v_0 . Ezek az értékek meghatározzák az energiát, amely

szerepel a megoldásban: $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{\alpha}{x_0^2}$. A C konstansot pedig a következő egyenletből kaphatjuk meg:

$$C = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{Ex_0^2 - \alpha}$$

Az x_0 pontból elindulhatunk az origó felé és azzal ellentétesen is. Hogyan vesszük ezt figyelembe a megoldásban?

2. Másodrendű differenciálegyenletek

35 pont

- (a) Egy csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenletét a következő differenciálegyenletté alakíthatjuk:

$$\ddot{y} + \dot{y} + \frac{5}{2}y = 0$$

A nyugalomban lévő harmonikus oszcillátornak a $t = 0$ pillanatban v kezdősebességet adunk. Határozzuk meg a mozgását!

Megoldás:

Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{2} = 0$$

Az egyenlet két gyöke:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 10}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{3}{2}$$

a homogén megoldást kereshetjük a következő alakban:

$$y(t) = Ae^{-t/2} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + Be^{-t/2} \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

Miután a tömegpont kezdetben nyugalomban volt és v kezdősebességet kapott $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$.

$$y(0) = A = 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{3}{2}B = v$$

A megoldás tehát:

$$y(t) = \frac{2}{3}ve^{-t/2} \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

- (b) Az előző differenciálegyenletnek határozzuk meg a Green függvényét és adjunk meg egy partikuláris megoldást az $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\Theta(t)$ gerjesztés esetén!

Megoldás:

Használjuk fel az előző homogén megoldásokat!

$$y_h(t) = Ae^{-t/2} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + Be^{-t/2} \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

A Green függvény előállításához a homogén megoldásnak a következő kezdőértékeket kell teljesítenie:

$$y_h(0) = A = 0$$

$$\dot{y}_h(0) = \frac{3}{2}Be^{-t/2} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \Big|_{t=0} - \frac{B}{2}e^{-t/2} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \Big|_{t=0} = \frac{3}{2}B = 1$$

A Green függvény tehát

$$G(t, t') = \frac{2}{3}e^{-(t-t')/2} \sin\left(\frac{3}{2}(t-t')\right) \Theta(t-t')$$

Egy partikuláris megoldát a következő integrállal állíthatunk elő:

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') e^{-\frac{1}{2}t'} \Theta(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{3} e^{-(t-t')/2} \sin\left(\frac{3}{2}(t-t')\right) \Theta(t-t') e^{-\frac{1}{2}t'} \Theta(t') dt'$$

$$= \frac{2}{3} e^{-t/2} \int_0^t \sin\left(\frac{3}{2}(t-t')\right) dt' = \frac{4}{9} e^{-t/2} \cos\left(\frac{3}{2}(t-t')\right) \Big|_0^t = \frac{4}{9} e^{-t/2} \left(1 - \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$$

- (c) Állítsuk elő az előző feladat Green függvényét Fourier térben és az előző gerjesztés esetén adjuk meg egy partikuláris megoldás Fourier transzformáltját!

Megoldás:

Vegyük a Green függvényt meghatározó

$$\ddot{g} + \dot{g} + \frac{5}{2}g = \delta(t)$$

differenciálegyenlet Fourier transzformáltját:

$$-\omega^2 G(\omega) + i\omega G(\omega) + \frac{5}{2}G(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Innen

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + \frac{5}{2}}$$

A partikuláris megoldás Fourier transzformáltjához határozzuk meg a gerjesztés transzformáltját:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/2} \Theta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(1/2+i\omega)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1/2 + i\omega}$$

A partikuláris megoldás Fourier transzformáltja a Green függvény és a gerjesztés transzformáltjának a szorzata lesz:

$$y_p(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + \frac{5}{2}} \frac{1}{1/2 + i\omega}$$

3. Fourier transzformáció

30 pont

Határozzuk meg a következő függvények Fourier transzformáltjait!

- (a) $f(t) = e^{-t}\Theta(t)$
- (b) $f(t) = e^{-|t|}$ (Az előző Fourier transzformált segítségünkre lehet!)
- (c) $f(t) = e^{-|t-\tau|}$
- (d) $f(t) = e^{-|t|} \sin(\omega_0 t)$

Megoldás:

(a) $f(t) = e^{-t}\Theta(t)$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(t+i\omega)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+i\omega}$$

(b) $h(t) = e^{-|t|}$

Vegyük észre, hogy $e^{-|t|} = e^t\Theta(-t) + e^{-t}\Theta(t)$ vagyis $h(t) = f(t) + f(-t)$! Tehát

$$\mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}[f(t)] + \mathcal{F}[f(-t)] = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+\omega^2}$$

(c) $h(t) = e^{-|t-\tau|}$

$$\mathcal{F}[h(t)] = e^{-i\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)] = e^{-i\omega\tau} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+\omega^2}$$

(d) $f(t) = e^{-|t|} \sin(\omega_0 t)$

Tudjuk azt, hogy szorzat függvények Fourier transzformáltja a Fourier transzformáltak konvolúciója. Határozzuk meg $\sin(\omega_0 t)$ Fourier transzformáltját:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \quad , \quad \mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = \frac{1}{2i} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

A Fourier transzformált tehát a következő integrál lesz:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\omega-\omega')^2} \frac{1}{2i} (\delta(\omega' - \omega_0) - \delta(\omega' + \omega_0)) d\omega' \\ &= \frac{1}{4i\pi} \left(\frac{1}{1+(\omega-\omega_0)^2} - \frac{1}{1+(\omega+\omega_0)^2} \right) \end{aligned}$$

Hasznos összefüggések:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[f(t + \tau)] = e^{i\omega\tau} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega') G(\omega') d\omega'$$

$$u(t) = e^{\int p(t') dt'} , \quad x(t) = \frac{1}{u(t)} \int u(t') q(t') dt' + \frac{C}{u(t)}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(\operatorname{ch}(x)) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

Kérem, hogy ne dolgozzanak gyűrött, füzetből kitépett lapon! A dolgozatot ne hajtsák félbe!

Jó munkát!