

Inhomogén Differenciál Egyenletek

1. Feladat

Határozzuk meg a következő differenciálegyenletrendszer általános megoldását:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_3 &= y_1 + y_2 - 3y_3\end{aligned}$$

Ha a differenciálegyenletet $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ alakban írjuk fel, mi lesz az $\mathbf{A}$ mátrix. Milyen speciális tulajdonsága van a mátrixnak? Mik lesznek a sajátértékei? (Egy háromszög mátrix determinánsa a diagonálisban lévő mátrixelemek szorzatával egyenlő.) Keressük a megoldást

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \mathbf{u}_3 e^{\lambda_3 t}$$

alakban. Mik lesznek az $\mathbf{u}_i$ vektorok?

2. Feladat

(a) Integráljuk a következő kifejezést a teljes számegyenesre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \delta(x-n)$$

(b) Határozzuk meg a következő függvények első deriváltját:

$$f(x) = e^{-x}\Theta(x), \quad g(x) = \Theta(x+a) - \Theta(x-a)$$

(c) Határozzuk meg a következő függvények második deriváltját:

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = e^{i|x|}$$

3. Feladat

Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek Green függvényét és oldjuk meg a kezdetiérték problémákat:

$$\begin{aligned}\dot{y} + \sin(t)y &= \sin(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{y} + ty &= e^{-\frac{t^2}{2}}, & y(0) &= 1\end{aligned}$$