

1. Gyakorlat

1. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

a.) $y' = \ln(x)y$

b.) $y' - \frac{2y}{x} = 0$

2. Egy autót P teljesítménnyel gyorsítunk álló helyzetből. Hogyan fog változni a sebessége, ha surlódási erő arányos a sebességgel?

Megoldás:

A munka, amelyet az autón végzünk egy kicsiny ds távolságon $dW = Fds$. A teljesítmény, az egységnyi idő alatt végzett munka: $\frac{dW}{dt} = F \frac{ds}{dt} = Fv$. Használjuk ki Newton második axiómáját: $F = ma = m\dot{v}$ és írjuk be az erőt a teljesítmény képletébe, de vegyük figyelembe, hogy a P teljesítményből le kell vonnunk a súrlódásból adódó járulékot, így a következő egyenletet kapjuk:

$$m\dot{v}v = P - \alpha v^2.$$

Vezessünk be egy új változónak a sebesség négyzetét: $w = v^2$ és vegyük észre, hogy $\frac{d}{dt}v^2 = 2v\dot{v}$. Az új változóval a következő differenciál egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{2}m\dot{w} = P - \alpha w, \quad \dot{w} + \frac{2\alpha}{m}w = \frac{2P}{m}$$

Ez egy standard alakú inhomogén elsőrendű k.d.e., amelynek a megoldása:

$$w(t) = e^{-\frac{2\alpha}{m}t} \int e^{\frac{2\alpha}{m}t} \frac{2P}{m} dt + C e^{-\frac{2\alpha}{m}t}$$

Ha feltételezzük, hogy P állandó időben, akkor a megoldás

$$w(t) = \frac{2P}{m} \frac{m}{2\alpha} e^{-\frac{2\alpha}{m}t} e^{\frac{2\alpha}{m}t} + C e^{-\frac{2\alpha}{m}t} = \frac{P}{\alpha} + C e^{-\frac{2\alpha}{m}t}.$$

A sebesség négyzete kezdetben nulla volt, tehát $C = -\frac{P}{\alpha}$. Tehát:

$$w(t) = \frac{P}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\right).$$

A sebesség w négyzetgyöke:

$$v(t) = \sqrt{\frac{P}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\right)}$$

Ha időben belefér oldjuk meg a példát úgy is, hogy P időben változik, pl.
 $P(t) = P_0 \sin^2(\omega t)$!

3. Határozzuk meg a következő kezdetiérték probléma megoldását:

$$t\dot{y} + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

(Dowkins könyv 37. oldal)

Vegyük észre, hogy az egyenlet átírható a

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = t^3 - t^2 + t$$

alakba.

4. Határozzuk meg a következő kezdetiérték probléma megoldását (Dowkins: 44. old.):

$$\dot{y} = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4}, \quad y(1) = 3$$