

Számítási módszerek a fizikában 2. ZH

Név: _____

Neptun kód: _____

1. Gradiens, divergencia, rotáció Descartes koordinátákban:

a.) Határozzuk meg a következő skalár terek gradiensét:

$$\Phi(\mathbf{r}) = r^4, \quad \Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{r})(\mathbf{b} \times \mathbf{r}),$$

ahol r az $\mathbf{r}$ vektor hosszát jelöli, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ pedig állandó vektorok.

Megoldás:

$$\begin{aligned} \nabla r^4 &= \frac{dr^4}{dr} \nabla r = 4r^3 \frac{\mathbf{r}}{r} = 4r^2 \mathbf{r} \\ (\nabla(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}))_i &= \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial r_i} a_j r_j b_k r_k = \sum_{jk} a_j \delta_{ij} b_k r_k + a_j r_j b_k \delta_{ik} = a_i \sum_j b_j r_j + b_i \sum_j a_j r_j \\ \nabla(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{r})(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) = \sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} a_j r_k \epsilon_{ilm} b_l r_m = \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j r_k b_l r_m \\ &= \sum_{jk} a_j b_j r_k r_k - a_j r_j b_k r_k = (\mathbf{a}\mathbf{b})r^2 - (\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}) \\ (\nabla(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}))_i &= \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial r_i} a_j r_j b_k r_k = \sum_{jk} (\delta_{ij} a_j b_k r_k + a_j r_j b_k \delta_{ik}) = a_i \sum_j b_j r_j + b_i \sum_j a_j r_j \\ \nabla(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{r}) \end{aligned}$$

b.) Határozzuk meg a következő vektortér divergenciáját és rotációját:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}),$$

ahol $\mathbf{a}$ állandó vektor.

Megoldás:

Az előzőekhez hasonlóan kifejezhetjük a kettős keresztszorzatot:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}(\mathbf{a}\mathbf{r}) - \mathbf{a}r^2$$

Előbb határozzuk meg a divergenciáját:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{r}(\mathbf{a}\mathbf{r}) - \mathbf{a}r^2) &= \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial r_i} (r_i a_j r_j - a_i r_j r_j) = \sum_{ij} (\delta_{ii} a_j r_j + r_i a_j \delta_{ij} - 2a_i \delta_{ij} r_j) \\ &= \sum_i (3a_i r_i + r_i a_i - 2a_i r_i) = 2\mathbf{a}\mathbf{r} \end{aligned}$$

A vektortér rotációjának a kiszámolásához először határozzuk meg az első tag rotációját:

$$(\text{rot } \mathbf{r}(\mathbf{ar}))_i = \sum_{jkl} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} r_k a_l r_l = \sum_{jkl} \epsilon_{ijk} (\delta_{jk} a_l r_l + r_k a_l \delta_{jl}) = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} r_k a_j$$

Hasonlóan járjunk el a második tag esetén:

$$(\text{rot } r^2 \mathbf{a})_i = \sum_{jkl} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} a_k r_l r_l = \sum_{jkl} 2\epsilon_{ijk} a_k \delta_{jl} r_l = \sum_{jk} 2\epsilon_{ijk} a_k r_j$$

A vektortér rotációja a két tag különbsége lesz:

$$(\text{rot } \mathbf{r}(\mathbf{ar}) - \mathbf{ar}^2)_i = \sum_{jk} (\epsilon_{ijk} r_k a_j - 2\epsilon_{ijk} a_k r_j) = 3 \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j r_k$$

Vagyis:

$$\text{rot } (\mathbf{r}(\mathbf{ar}) - \mathbf{ar}^2) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

c.) Mutassuk meg, hogy a következő két vektortérnek ugyanaz a rotációja:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}), \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{r}(\mathbf{ra}) - \mathbf{r}^2(\mathbf{a} + \mathbf{r})$$

Megoldás:

Az előzőek alapján: $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_1(\mathbf{r}) + r^2 \mathbf{r}$. Az első feladat alapján $r^2 \mathbf{r} = \frac{1}{4} \nabla r^4$, tehát a két vektortér csak egy skalár tér gradienseben különbözik egymástól. Tudjuk, hogy egy skalár tér gradiense a rotációja eltűnik, ezért a két vektortér rotációja megegyezik!

2. Differenciáloperátorok görbevonallú koordináta rendszerekben:

a.) Írjuk fel henger és gömbi koordináta rendszerekben az $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ és $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok segítségével a következő mennyiségeket:

$$\mathbf{r} = \quad \dot{\mathbf{r}} = \quad \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \quad (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})^2 =$$

Megoldás:

Henger koordináta rendszerben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \times (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z) = \rho^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + (\dot{\rho} z - \rho \dot{z}) \mathbf{e}_\varphi - z \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho \\ (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})^2 &= (\rho^2 \dot{\varphi})^2 + (\dot{\rho} z - \rho \dot{z})^2 + (z \rho \dot{\varphi})^2 \end{aligned}$$

Gömbi koordináta rendszerben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \sin(\vartheta) \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= r \mathbf{e}_r \times (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \sin(\vartheta) \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = r^2 \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\varphi - r^2 \sin(\vartheta) \dot{\varphi} \mathbf{e}_\vartheta \\ (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})^2 &= r^4 \dot{\vartheta}^2 + r^4 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

b.) Írjuk fel az alábbi vektortereket henger és gömbi koordináta rendszerekben:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{xz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \\ \frac{yz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \end{pmatrix}$$

Megoldás:

Henger koordináta rendszerben:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) = \varrho \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = z \mathbf{e}_\varrho - \varrho \mathbf{e}_z$$

Gömbi koordináta rendszerben:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) = r \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = r \mathbf{e}_\vartheta$$

c.) Határozzuk meg $\mathbf{V}_1$ vektortér divergenciáját és rotációját henger koordináta rendszerben és $\mathbf{V}_2$ vektortér divergenciáját és rotációját gömbi koordináta rendszerben.

Megoldás:

A $\mathbf{V}_1(\mathbf{r})$ vektortérnek csak V_φ komponense van, amely csak a ϱ változótól függ, ezért a divergenciája eltűnik. A rotációja meghatározásához csak a V_φ komponenst tartalmazó tagot kell kiértékelni:

$$\text{rot} \mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} V_\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} \right) = 2 \mathbf{e}_z$$

Gömbi koordináta rendszerben a $\mathbf{V}_2(\mathbf{r})$ vektortérnek csak V_ϑ komponense van, amely csak az r változótól függ: $V_\vartheta = r$.

$$\text{div} \mathbf{V}_2 = \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin(\vartheta)) = \text{ctg}(\vartheta)$$

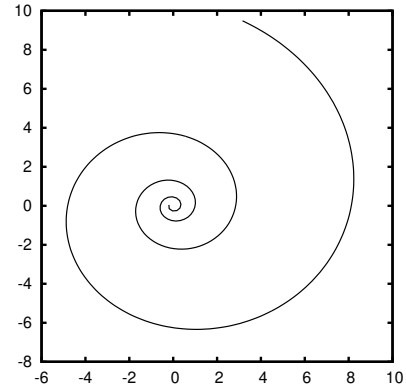
A divergenciához hasonlóan a rotáció meghatározásához is csak a V_ϑ komponenst tartalmazó tagot kell kiértékelni:

$$\text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right) = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial r^2}{\partial r} = 2 \mathbf{e}_\varphi$$

3. Vonalmenti integrálok:

Egy logaritmikus spirált a következőképpen parametrizálhatjuk henger koordinátákban:

$$\rho = vt, \quad \varphi = a \ln\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad t_0 \leq t$$



- a.) Egy l hosszúságú drótot tekerünk fel a spirál mentén. Milyen távol lesz a fonal vége az origótól?

Megoldás:

A vonalmenti integrál elvégzéséhez határozzuk meg az ívelem:

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt = \frac{d}{dt}(vt\mathbf{e}_\varrho) = v\mathbf{e}_\varrho + vt\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

SZámítsuk ki a φ szög paraméter szerinti deriváltját:

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{t}$$

Az ívelem:

$$d\mathbf{r} = (v\mathbf{e}_\varrho + va\mathbf{e}_\varphi)dt, \quad dr = v\sqrt{1+a^2}dt$$

A spirál alakban feltekert fonal hossza:

$$l = \int_{t_0}^T v\sqrt{1+a^2}dt = (T-t_0)v\sqrt{1+a^2}$$

Tehát a paraméter maximális értéke:

$$T = \frac{l}{v\sqrt{1+a^2}} + t_0$$

Helyettesítsük be a távolság képletébe:

$$r_{max} = vT = \frac{l}{\sqrt{1+a^2}} + vt_0$$

- b.) A spirálban I nagyságú elektromos áram folyik. Határozzuk meg a mágneses teret az origóban a Biot-Savart törvény segítségével!

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Megoldás:

Határozzuk meg a Biot-Savart törvényben szereplő kereszt szorzatot:

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{r} = (v\mathbf{e}_\varrho + va\mathbf{e}_\varphi) \times vt\mathbf{e}_\varrho dt = v^2 at\mathbf{e}_z dt$$

Helyettesítsük be az integrálba:

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{t_0}^T \frac{v^2 at}{v^3 t^3} dt = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{v} \int_{t_0}^T \frac{1}{t^2} dt = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{v} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{T} \right)$$

- c.) Hol van a spirál tömegközéppontja? Elegendő csak az integrált felírni! (Használhatjuk a $\varphi = a \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$ helyettesítést!)

Megoldás:

Legyen a drót tömege m . Az egységnyi hosszra eső tömege: $\eta = m/l$. Egy kicsiny dr hosszúságú drót tömege m/ldr . Ennek a kis tömegnek a távolsága az origótól: $\mathbf{r} = vt\mathbf{e}_\varrho$. A tömegközéppont koordinátája:

$$\frac{1}{m} \int_{t_0}^T \frac{m}{l} vt\mathbf{e}_\varrho dr = \frac{v^2}{l} \int_{t_0}^T t \sqrt{1+a^2} \mathbf{e}_\varrho dt$$

Nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy $\mathbf{e}_\varrho$ is függ a paramétértől a φ szögön keresztül:

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ ahol } \varphi = a \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

Az integrálban térjünk át a φ változóra. Ekkor

$$t = t_0 e^{\frac{\varphi}{a}}, \quad dt = \frac{t_0}{a} e^{\frac{\varphi}{a}} d\varphi$$

Végezzük el az integrált:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2}{l} \int_{t_0}^T t \sqrt{1+a^2} \cos(\varphi) dt = \frac{v^2}{l} \sqrt{1+a^2} \frac{t_0}{a} \int_0^{\varphi_{max}} e^{\frac{2\varphi}{a}} \cos(\varphi) d\varphi \\ y &= \frac{v^2}{l} \sqrt{1+a^2} \frac{t_0}{a} \int_0^{\varphi_{max}} e^{\frac{2\varphi}{a}} \sin(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

$$\text{ahol } \varphi_{max} = a \ln\left(\frac{T}{t_0}\right).$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_{max}} e^{\frac{2\varphi}{a}} \cos(\varphi) d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_{max}} \left(e^{\left(\frac{2}{a}+i\right)\varphi} + e^{\left(\frac{2}{a}-i\right)\varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\left(\frac{2}{a}+i\right)\varphi_{max}}}{\frac{2}{a}+i} + \frac{e^{\left(\frac{2}{a}-i\right)\varphi_{max}}}{\frac{2}{a}-i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2}{a}+i} + \frac{1}{\frac{2}{a}-i} \right) \\ &= \frac{ae^{\frac{2\varphi_{max}}{a}}}{4+a^2} (4 \cos(\varphi_{max}) + a \sin(\varphi_{max})) - \frac{2a}{4+a^2} \end{aligned}$$

Gömbi koordináta rendszer:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\vartheta \sin(\vartheta)) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left(\frac{\partial \sin(\vartheta) V_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

Henger koordináta rendszer:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(V_\rho + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho V_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \mathbf{e}_\varrho \left(\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} V_\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$