

Számítási módszerek a fizikában 1. ZH

Név:

Neptun kód:

1. Fourier transzformáció:

(33 pont)

Számoljuk ki a következő függvények Fourier-transzformáltját!

- a.) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$
- b.) $f(t) = e^{-\alpha|t-\tau|}$
- c.) $f(t) = e^{-2\alpha|t|}$
- d.) $f(t) = e^{-\alpha|t|}e^{i\omega_0 t}$

Megoldás:

a.) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

b.) $f(t) = e^{-\alpha|t-\tau|}$

$$F(\omega) = e^{-i\tau\omega} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

c.) $f(t) = e^{-2\alpha|t|}$

$$F(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

d.) $f(t) = e^{-\alpha|t|}e^{i\omega_0 t}$ Az $e^{i\omega_0 t}$ függvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Két függvény szorzatának Fourier transzformáltja a két Fourier transzformált konvolúciója:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega')^2} 2\pi\delta(\omega' - \omega_0) d\omega' = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

2. Feladat: Elsőrendű differenciálegyenletek**(33 pont)**

- a.) Határozzuk meg az alábbi elsőrendű differenciálegyenlet megoldását $y(0) = 1$ kezdő feltétel mellett:

$$\sqrt{1+t^2}\dot{y} = ty^2$$

Megoldás:

Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt + C$$

Végezzük el az integrálásokat:

$$-\frac{1}{y} = \sqrt{1+t^2} + C$$
$$y = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2} + C}$$

Azért, hogy kielégítsük a kezdeti feltételt, legyen $C = -2$.

$$y(t) = \frac{1}{2 - \sqrt{1+t^2}}$$

- b.) Határozzuk meg a következő elsőrendű közönséges differenciálegyenlet Green függvényét:

$$\dot{y} + \frac{1}{1+t}y = f(t)$$

Megoldás:

Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet esetén a Green függvény alakja a következő:

$$G(t, t') = e^{-\int_{t'}^t p(t'') dt''} \Theta(t - t'), \quad p(t) = \frac{1}{1+t}$$

Végezzük el az integrálást:

$$-\int_{t'}^t \frac{1}{1+t''} dt'' = \ln \left(\frac{1+t'}{1+t} \right)$$

Helyettesítsük vissza az integrált a Green függvény képletébe:

$$G(t, t') = \frac{1+t'}{1+t} \Theta(t - t')$$

- c.) Keressük meg a Green fv. segítségével az előző differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását $f(t) = \frac{1}{1+t}\Theta(t)$ esetén!

Megoldás:

A partikuláris megoldást a következő alakban kereshetjük:

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') f(t') dt' = \int_0^t \frac{1}{t+t'} dt'$$

A mi esetünkben:

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t'}{1+t} \Theta(t-t') \frac{1}{1+t'} \Theta(t') dt' = \frac{t}{1+t}$$

- d.) Keressük meg a

$$\dot{y} + \frac{1}{1+t}y = \frac{1}{1+t}\Theta(t)$$

differenciálegyenlet megoldását $y(0) = 1$ kezdőfeltétellel!

Megoldás:

Keressük meg a homég megoldást:

$$\dot{y} + \frac{1}{1+t}y = 0$$

Ez is egy egyszerű szétválasztható differenciálegyenlet:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$\ln(y) = -\ln(1+t), \quad y_h = \frac{1}{1+t}$$

A megoldást $y_p(t) + Ay_h(t)$ alakban keressük. A partikuláris megoldás eltűnik nullában, ezért a homogén megoldásnak kell egységnyiinek lennie, vagyis $A = 1$):

$$y(t) = \frac{t}{1+t} + \frac{1}{1+t}$$

3. Feladat: Másodrendű differenciálegyenletek

(34 pont)

- a.) Mutassuk meg behelyettesítéssel, hogy a

$$g(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

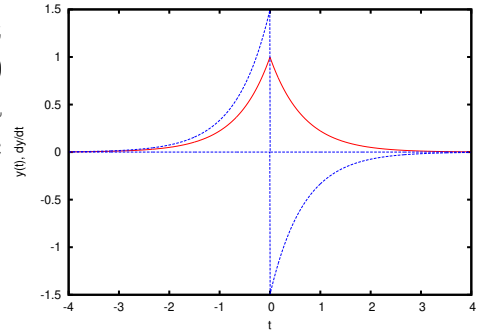
függvény kielégíti a következő differenciálegyenletet:

$$\ddot{g} - \alpha^2 g = \delta(t).$$

Megoldás:

A szomszédos ábrán az $g(t)$ függvényt és a deriváltját ábrázoltuk. a $t = 0$ pontban a deriváltnak ugrása van, így a második deriváltban megjeleni egy Dirac delta. Bontsuk fel két részre a függvényt:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t} & \text{ha } t < 0 \\ \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t} & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$



$$\dot{g} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\alpha t} & \text{ha } t < 0 \\ -\frac{1}{2} e^{-\alpha t} & \text{ha } t > 0 \end{cases}, \quad \ddot{g} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} e^{\alpha t} & \text{ha } t < 0 \\ -\delta(t) & \text{ha } t = 0 \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t} & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Tehát a második derivált $\ddot{g} = -\alpha^2 \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} + \delta(t)$ alakú lesz.

Sajnos a ZH-ban történt egy elírás: helyesen $g(t) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$ A differenciálegyenletbe helyettesítve $g(t)$ -t, a jobb oldalon Dirac deltát kapunk.

- b.) Határozzuk meg a differenciálegyenlet Green függvényét!

Megoldás:

Az előző feladatban tulajdonképpen egy állandó együtthatós, másodrendű differenciálegyenlet Green függvényét adtuk meg:

$$G(t - t') = g(t - t') = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t-t'|}$$

Ebben az esetben az abszolút érték miatt jelenik meg a Dirac delta és nincs szükség a lépésfüggvényre.

- c.) Keressük meg a következő differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását:

$$\ddot{y} - \alpha^2 y = \Theta(t) !$$

Megoldás:

A partikuláris megoldást a Green függvény segítségével állíthatjuk elő:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') f(t') dt' = - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t-t'|} \Theta(t') dt' \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \int_t^{\infty} e^{\alpha(t-t')} dt' - \frac{1}{2\alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} dt' \\ &= -\frac{e^{\alpha t}}{2\alpha} \int_t^{\infty} e^{-\alpha t'} dt' - \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha} \int_0^t e^{\alpha t'} dt' = -\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} e^{-\alpha t} - 1 \right) \end{aligned}$$

d.) Oldjuk meg a differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $\dot{y} = 0$ kezdőfeltételekkel!

Megoldás:

A megoldást a partikuláris megoldás és a homogén megoldások összegeként kereshetjük:

$$y(t) = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} e^{-\alpha t} - 1 \right) + A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

érdeemes az exponenciális függvények helyett hiperbolikus függvényeket használni:

$$y(t) = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} e^{-\alpha t} - 1 \right) + C \operatorname{sh}(\alpha x) + D \operatorname{ch}(\alpha x)$$

Az $y(0) = 0$ feltétel szerint:

$$-\frac{1}{2\alpha^2} + D = 0, \quad D = \frac{1}{2\alpha^2},$$

a deriváltra vonatkozó feltétel szerint:

$$\dot{y}(0) = -\frac{1}{2\alpha} + C\alpha = 0, \quad C = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

A megoldás tehát:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 2) + \frac{1}{2\alpha^2} \operatorname{sh}(\alpha t) + \frac{1}{2\alpha^2} \operatorname{ch}(\alpha t) \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 2 + \operatorname{sh}(\alpha t) + \operatorname{ch}(\alpha t)) = \frac{1}{2\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 2 + e^{\alpha t}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (\operatorname{ch}(\alpha t) - 1) \end{aligned}$$

Megjegyzés a Green függvény egyértelműségéhez:

Az előző feladatban keressük meg a Green függvényt az előadáson hallottak alapján! Keressük a Green függvényt a homogén megoldás és a lépésfüggvény szorzataként, ahol a homogén megoldásnak a következő feltételeket kell kielégítenie:

$$y_h(0) = 0, \quad \dot{y}_h(0) = 1.$$

Esetünkben a homogén differenciálegyenlet a következő: $\ddot{y} - \alpha^2 = 0$, a karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - \alpha^2 = 0$. A λ exponensek: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$. Keressük a homogén megoldást $y_h(t) = A \operatorname{sh}(\alpha t) + B \operatorname{ch}(\alpha t)$ alakban. A határfeltételeket kielégítő megoldás:

$$y_h(t) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha t)$$

A Green függvény

$$G(t - t') = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha(t - t')) \Theta(t - t').$$

A feladat szerint a Green függvény:

$$G_0(t-t') = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}.$$

Hogyan viszonylik a két Green függvény egymáshoz? Bontsuk fel a G_0 Green függvényt két részre:

$$G_0(t-t') = \begin{cases} -\frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t-t')} & \text{ha } t < t' \\ -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(t-t')} & \text{ha } t > t' \end{cases}$$

Írjuk fel a Green függvényt a lépésfüggvény segítségével:

$$\begin{aligned} G_0(t-t') &= -\frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t-t')} \Theta(t'-t) + -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(t-t')} \Theta(t-t') \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \left(e^{\alpha(t-t')} (1 - \Theta(t-t')) + e^{-\alpha(t-t')} \Theta(t-t') \right) \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left(e^{\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t-t')} \right) \Theta(t-t') - \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t-t')} \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{sh}(\alpha(t-t')) \Theta(t-t') - \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t} e^{-\alpha t'} = G(t-t') - \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t} e^{-\alpha t'} \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$G_0(t-t') = G(t-t') - \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t} e^{-\alpha t'}$$

Vizsgáljuk meg, hogy $G_0(t-t')$ kielégíti-e a differenciálegyenletet? Vegyük észre, hogy $e^{\alpha t}$ éppen az egyik homogén megoldás:

$$\ddot{G}_0(t-t') - \alpha^2 G_0(t-t') = \ddot{G}(t-t') - \alpha^2 G(t-t') - \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t'} (\ddot{y}_h(t) - \alpha^2 y_h(t))$$

Az első tag $\delta(t-t')$, a második tag pedig eltűnik, hiszen kielégíti a homogén egyenletet, tehát

$$\ddot{G}_0(t-t') - \alpha^2 G_0(t-t') = \delta(t-t')$$

vagyis $G_0(t-t')$ is Green függvénye a differenciálegyenletnek. Ellenőrizzük, hogy a segítségével előállított partikuláris megoldás is kielégíti-e az inhomogén egyenletet:

$$\begin{aligned} y_{p0}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t-t') f(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt' - y_h(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t'} f(t') dt' \\ &= y_p(t) - A y_h(t), \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t'} f(t') dt', \end{aligned}$$

vagyis az $y_{p0}(t)$ partikuláris megoldás csak a homogén megoldás számszorosával különbözik a $G(t-t')$ Green függvényhez tartozó partikuláris megoldástól.

Általánosságban ha a $G(t, t')$ Green függvény előállítja a partikuláris megoldást, akkor a $\tilde{G}(t, t') = G(t, t') + y_h(t) f(t')$ függvény is Green függvénye a differenciálegyenletnek, ahol $y_h(t)$ a differenciálegyenlet egy homogén megoldása, $f(t')$ pedig egy tetszőleges függvény, amelyre létezik a $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ integrál.