

5. Házi feladat

Határozzuk meg a következő függvények Fourier transzformáltját:

1. $f(t) = \cos(\omega_0 t)$

2. $f(t) = \sin(\omega_0 t)$

3. $f(t) = e^{-a|t|}$

4. $f(t) = \frac{\sin(at)}{t}$

Ebben az esetben érdemes a Fourier transzformált ω szerinti deriváltját meghatározni először és ezt integrálni.

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} e^{-i\omega t} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(at) e^{-i\omega t} dt$$

Használjuk fel:

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)a} - e^{-i(\omega_0 - \omega)a}}{i(\omega_0 - \omega)} = 2 \frac{\sin((\omega_0 - \omega)a)}{\omega_0 - \omega} = 2\pi \delta(\omega_0 - \omega) ,$$

ahol $\mathcal{F}\{f(t)\}$ az $f(t)$ függvény fourier transzformáltját jelenti.