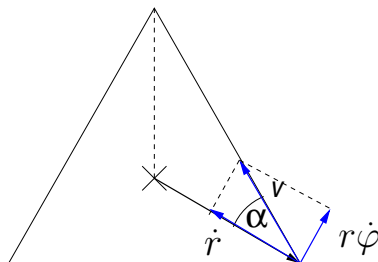


Név:
Pontszám:

Fizika Pót ZH 1

1. Feladat

Három légy ül egy szabályos háromszög három csúcsán. (Az ábrán nyilak jelölik a legyeket.) Egyszer csak elindulnak egymás felé úgy, hogy mindegyik légy mindig a tőle jobbra levő légy felé mozog állandó v sebességgel. A legyek mindig egy szabályos háromszög csúcsain lesznek, ahogy azt az ábra is mutatja. Az ábráról leolvashatóan $\dot{r} = -v \cos(\alpha)$ és $r\dot{\phi} = v \sin(\alpha)$.



- a.) Mennyi idő múlva találkoznak, ha a háromszög oldala a ?
- b.) Általánosítsuk a feladatot egy R sugarú körbe írt szabályos sokszög esetére, ha a sokszög minden csúcsán ül egy légy!
- c.) A legyekkel együtt forgó rendszerben adjuk meg a Coriolis erőt! $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\dot{\phi}$, ahol $\mathbf{n}$ a lap síkjából kifelé mutató egységvektor.

Megoldás:

- a.) Az ábráról leolvashatóan $\alpha = 30^\circ$, a középponttól való távolság kezdetben pedig $R = a/\sqrt{3}$. A forgó rendszerben a legyek a háromszög középpontja felé mozognak:

$$r(t) = R - vt \cos(30^\circ).$$

A középpontban fognak találkozni: $r(t) = 0$, vagyis

$$R - vT \cos(30^\circ) = 0, \quad \frac{a}{\sqrt{3}} - vT \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Tehát

$$T = \frac{2a}{3v}.$$

- b.) Általános esetben $\alpha = 1/2(180^\circ - 360^\circ/n) = 90^\circ - 180^\circ/n$, és az előző megfontolásoknak megfelelően

$$T = \frac{R}{v \cos(\alpha)} = \frac{R}{v \sin(\frac{180^\circ}{n})}.$$

- c.) A Coriolis erő $F_C = 2m\mathbf{v} \times \mathbf{n}\dot{\phi}$ és az ábrán $r\dot{\phi}$ -val párhuzamos, nagysága:

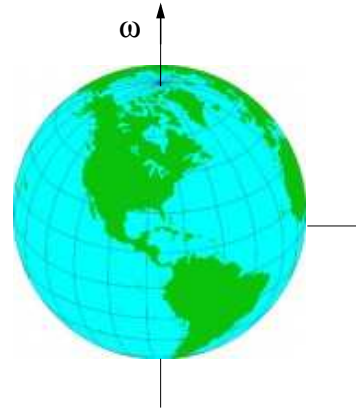
$$|2m\mathbf{v} \times \mathbf{n}\dot{\phi}| = 2mv \cos(\alpha) \frac{v \sin(\alpha)}{r} = m \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{R - vt \cos(\alpha)}$$

2. Feladat

A matematikai inga periódusidejét a következő képlettel adhatjuk meg:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Adjuk meg az északi póluson és az egyenlítőn lévő, egyforma hosszúságú inga periódusidejének az arányát, ha a föld sugara $R = 6378 \text{ km}$. Becsüljük meg, hogy az északi póluson pontosan járó óra mennyit késik egy év alatt az egyenlítőn?



Megoldás:

A centrifugális erő miatt az Egyenlítőn kisebb lesz a gravitációs gyorsulás, mint az Északi sarkon, hiszen a $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ centrifugális gyorsulás az Északi sarkon, miután $\boldsymbol{\omega}$ párhuzamos a $\mathbf{r}$ helyvektorral, nem ad járulékot.

$$\frac{T_N}{T_E} = \sqrt{\frac{g}{g - \Omega^2 R}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R}{g}}}.$$

A Föld 24 óra alatt tesz meg egy teljes fordulatot a tengelye körül, tehát

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \text{ s}} = 0.727 \times 10^{-4} \text{ 1/s}.$$

A centrifugális gyorsulás: $\Omega^2 R = 0.727^2 \times 10^{-8} \text{ 1/s}^2 \cdot 6.378 \times 10^6 = 3.373 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ hozzávetőleg három nagyságrenddel kisebb, mint a gravitációs gyorsulás, így nem követünk el nagy hibát akkor, ha a periódusidők hányadosára kapott kifejezést sorba fejtjük első rendig. Tehát az $f(x) = 1/\sqrt{x}$ függvényt kell sorba fejteni 1 körül!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

$$\frac{T_N}{T_E} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R}{g}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 R}{g} = 1 + \frac{1}{2} \frac{3.373 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = 1 + 1.686 \times 10^{-3}$$

Egy év alatt összesen $365 \cdot 1.686 \times 10^{-3} = 0.615$ napot fog késni az óránk az egyenlítőn.

3. Feladat

Vezessük be a $\text{th}(\chi) = \frac{v}{c}$ rapiditást. Mutassuk meg, hogy a rapiditás segítségével a Lorentz transzformáció a következő alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\chi) & -\text{sh}(\chi) \\ -\text{sh}(\chi) & \text{ch}(\chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy ha áttérünk a $\mathcal{K}$ inerciarendszerről a $\mathcal{K}'$ rendszerre majd innen a $\mathcal{K}''$ rendszerre, akkor a fenti transzformációban a rapiditások összeadódnak.

Megoldás:

A Lorentz transzformációt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{1 - \text{th}^2(\chi)}} \begin{pmatrix} 1 & -\text{th}(\chi) \\ -\text{th}(\chi) & 1 \end{pmatrix} = \text{ch}(\chi) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\text{sh}(\chi)}{\text{ch}(\chi)} \\ -\frac{\text{sh}(\chi)}{\text{ch}(\chi)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\chi) & -\text{sh}(\chi) \\ -\text{sh}(\chi) & \text{ch}(\chi) \end{pmatrix}$$

Kétszer elvégezve a transzformációt a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{ch}(\chi_2) & -\text{sh}(\chi_2) \\ -\text{sh}(\chi_2) & \text{ch}(\chi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(\chi_1) & -\text{sh}(\chi_1) \\ -\text{sh}(\chi_1) & \text{ch}(\chi_1) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \text{ch}(\chi_2)\text{ch}(\chi_1) + \text{sh}(\chi_2)\text{sh}(\chi_1) & -\text{ch}(\chi_2)\text{sh}(\chi_1) - \text{sh}(\chi_2)\text{ch}(\chi_1) \\ -\text{ch}(\chi_2)\text{sh}(\chi_1) - \text{sh}(\chi_2)\text{ch}(\chi_1) & \text{ch}(\chi_2)\text{ch}(\chi_1) + \text{sh}(\chi_2)\text{sh}(\chi_1) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \text{ch}(\chi_2 + \chi_1) & -\text{sh}(\chi_2 + \chi_1) \\ -\text{sh}(\chi_2 + \chi_1) & \text{ch}(\chi_2 + \chi_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Feladat

Egy szabad részecske energiáját relativisztikusan a

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kifejezéssel adhatjuk meg. Mutassuk meg, hogy ha levonjuk a részecske $m_0 c^2$ nyugalmi energiáját, akkor kis sebességek esetén visszakapjuk az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiát!

Megoldás:

Használjuk ismét az $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sorfejtését 1 körül!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Alkalmazzuk az energi kifejezésre:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2.$$

Nyilvánvalóan, ha levonjuk az $m_0 c^2$ nyugalmi energiát, akkor visszakapjuk a kinetikus energia klasszikus alakját.