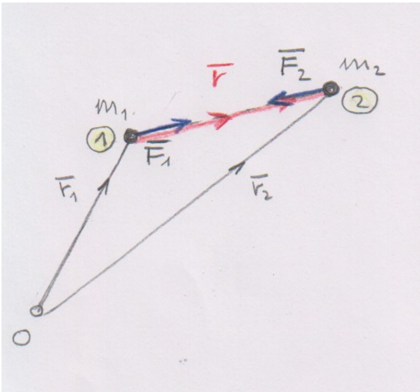
EGYSZERŰ PÉLDÁK pontrendszerekre (a „porszemektől a csillagokig”)

Az ún. „Kettest probléma” és a centrális erőtér

Az előzőekben egy tömegpontnak a centrális erőtérben történő mozgását vizsgáltuk. Az erőtér centruma rögzített volt. Az eddigi tapasztalatunk szerint egy testre ható erő forrása mindig valamilyen másik test. Még akkor is, ha azt valamilyen fizikai mező (pl gravitációs vagy elektromágneses erőtér) közvetíti. Így joggal merül fel a kérdés, hogyan valósulhat meg egy „rögzített” erőcentrum. A kölcsönhatás miatt (Newton3.) ugyanis az erőtér forrására is hat erő. Természetesen , ha a vizsgált test tömege sokkal, de sokkal kisebb, mint a másiké, akkor ez utóbbi jól közelítéssel rögzítettnek tekinthető. Azonban az esetek többségében a két kölcsönható tömeg között nincsen ilyen nagy eltérés.

Nézzük meg tehát, hogy mi ilyenkor a helyzet!



1.ábra

A mozgásegyenletek

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2$$

Hasson a két tömegpont között centrális, konzervatív erő. A kölcsönhatáshoz rendelhető potenciális energa $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$. Ekkor az erők definíciószerűen adódnak

$$\vec{F}_1 = -\nabla_1 V$$
$$\vec{F}_2 = -\nabla_2 V$$

Ahol ∇_k az $\vec{r}_k$ vektor szerinti gradienst jelöli („*k=1,2*”). Vezessük be a két tömegpont közötti távolságvektort, azaz

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ és}$$
$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

A kölcsönhatásból származó potenciális energia csak a két pont távolságától függhet, így

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r}) = V(r)$$

Ezzel a pontokra ható erők

$$\vec{F}_1 = -\nabla V = -\vec{e}_r\frac{dV}{dr} \equiv \vec{F}(r) \equiv +\vec{e}_r F(r)$$
$$\vec{F}_2 = +\nabla V = -\vec{e}_r F(r)$$

Alakítsuk át a mozgásegyenleteket a következő képpen

$$\ddot{\vec{r}}_1 = +\vec{e}_r \frac{1}{m_1} F(r)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{e}_r \frac{1}{m_2} F(r)$$

Ebből adódik, hogy

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{e}_r \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot F(r) \cdot$$

Átrendezés után azt kapjuk, hogy

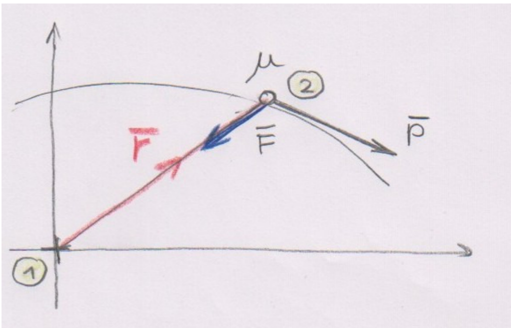
$$\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{e}_r \cdot F(r),$$

ahol

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Ez pedig egy **rögzített erőcentrum** terében mozgó „μ” tömegű pont mozgásegyenlete. Pontosan ez volt, amit kerestünk.



2.ábra

Tehát minden ún. „kéttest probléma” visszavezethető egyetlen „fiktív” tömegpont mozgására. Itt pedig már gond nélkül használhatók az előzőekben megbeszélt számítási technikák.
Konstruáljuk meg a munkatételt a szokásos módon, azaz

$$\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) \quad \Big| \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\mu \cdot \ddot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} = \vec{F}(r) \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \mu \cdot \dot{\vec{r}}^{\,2} \right) = -(\nabla V) \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

Átrendezéssel

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \mu \cdot \dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) \right) = 0$$

Tehát találtunk egy (a mozgás során) megmaradó (energia jellegű) mennyiséget

$$\frac{1}{2} \mu \cdot \dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) = E_\mu$$

Joggal merül fel a kérdés, hogy milyen energia ez? Pontosabban csak a „kinetikus energia” (jellegű) első tag érdekel bennünket, hiszen egy „fiktív tömegpont” mozgásához rendelt mennyiségről van szó.

A tömegpontrendszerek általános vizsgálatakor majd látni fogjuk, hogy a **tömegközéppontnak** (**TKP**) kulcsfontosságú szerepe van. Bemelegítőnek az ottaniakhoz oldjuk meg a kéttest problémánkat a TKP felhasználásával is.

A TKP definíciója

$$\vec{r}_{TKP} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$$

Ezzel a két tömegpont helyvektora

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{TKP} + \vec{r}_1'$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{TKP} + \vec{r}_2'$$

Most csak a két pont közötti kölcsönhatásból adódó ún. belső erők hatnak A mozgásegyenletek tehát (a fenti jelölésekkel)

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = +\vec{F}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}$$

Azaz

$$m_1\left(\ddot{\vec{r}}_{TKP} + \ddot{\vec{r}}_1'\right) = +\vec{F}$$
$$m_2\left(\ddot{\vec{r}}_{TKP} + \ddot{\vec{r}}_2'\right) = -\vec{F}$$

Összeadva a két egyenletet

$$\ddot{\vec{r}}_{TKP}\left(m_1 + m_2\right) + \left(m_1\ddot{\vec{r}}_1' + m_2\ddot{\vec{r}}_2'\right) = 0$$

Illetve

$$\ddot{\vec{r}}_{TKP} + \frac{1}{M}\left(m_1\ddot{\vec{r}}_1' + m_2\ddot{\vec{r}}_2'\right) = 0$$

De a második tag zérus, hiszen ebben a TKP definíciója szerepel egy olyan koordinátarendszerben, amelynek az origója maga a TKP. Ez azt jelenti, hogy a TKP gyorsulása nulla, azaz egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Határozzuk meg a kéttest rendszer kinetikus energiáját.

$$E_{KIN} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{r}}_{TKP} + \dot{\vec{r}}_1'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{r}}_{TKP} + \dot{\vec{r}}_2'\right)^2$$

Elvégezve a kijelölt négyzetre emeléseket

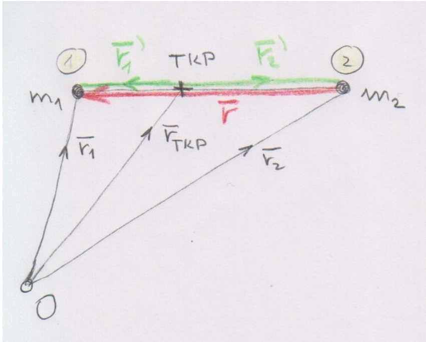
$$E_{KIN} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_{TKP}^{\,2} + \left\{\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^{\,2}\right\} + \left\{\dot{\vec{r}}_{TKP}\left(m_1\dot{\vec{r}}_1' + m_2\dot{\vec{r}}_2'\right)\right\}$$

A harmadik (összevont) tag nulla, mert ebben szintén a TKP helyét adjuk meg a TKP rendszerben. Tehát végül is azt kaptuk, hogy

$$E_{KIN} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_{TKP}^{\,2} + \left\{\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^{\,2}\right\} \equiv E_{KIN}^{TKP} + E_{KIN}^{belső}$$

Látható, hogy a rendszer teljes kinetikus energiája két független tagból áll, nevezetesen, a tömegközéppontba képzelt össztömeg kinetikus energiájának (E_{KIN}^{TKP}) és a TKP rendszerben megjelenő ún. belső kinetikus energia ($E_{KIN}^{belső}$) összege. Azaz a tömegközéppont mozgása leválasztható a „belső mozgásoktól”

Keressük meg a kapcsolatot az $E_{KIN}^{belső}$ és a korábban kapott $\frac{1}{2}\mu\cdot\dot{\vec{r}}^{\,2}$ között.



3.ábra

Ehhez kapcsolatot kell teremtenünk az $\{\vec{r}_1', \vec{r}_1'\}$ és az $\{\vec{r}\}$ helyvektorok között. Könnyen belátható

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{TKP} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{TKP} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

És ezért nyilván valóan

$$\vec{r}_1' = +\frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Ezzel kiszámítható a $E_{KIN}^{belső}$ belső kinetikus energia

$$E_{KIN}^{belső} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M^2}\left(m_2\dot{\vec{r}}^2 + m_1\dot{\vec{r}}^2\right)$$

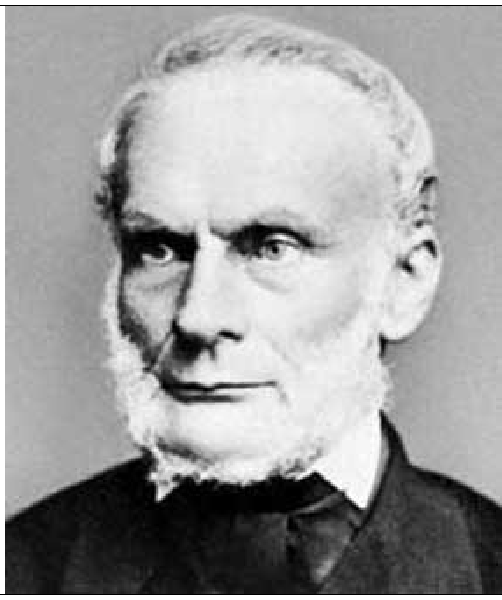
Azaz

$$E_{KIN}^{belső} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M^2}(m_2 + m_1)\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu\cdot\dot{\vec{r}}^2$$

Tehát az **egyetlen**, „fiktív μ tömegpont” kinetikus energiája éppen a **két tömegpontból** álló rendszer belső kinetikus energiáját adja.

A „viriál” tétel

Eddig a pontrendszerekkel kapcsolatosan olyan tételeket ismertettünk, amelyek már az alapozó mechanika tanulmányainkban is szerepeltek. Most egy olyan tétel következik, melyik „újszerűségével” kilóg ebből a sorból. Az ún. „viriál tételről” van szó. A „virial” szó a latin „vis” (energia, erő szóból származik. Lásd. még „életerő” = „vis vitalis”). Bevezetése **Clausius nevéhez fűződik (1870).**
A tétel lényege az, hogy egy kölcsönható tömegpontokból álló rendszer esetén kapcsolatot tudunk teremteni az átlagos kinetikus energia és a tömegpontokra ható (külső- és belső-) erők (potenciálok) valamiféle átlaga között.



Rudolf Julius Emmanuel CLAUSIUS
(1822 - 1888)

Látni fogjuk, hogy fogalom sikeresen használható mind a reális gázok (termodinamika) mind pedig a galaxisok (csillagászat) világában.

Adott egy „N" db tömegpontból álló rendszer. Minden tömegpontra belső erők ($\vec{F}_i^B$) és külső erők ($\vec{F}_i^K$) hatnak. A mozgásegyenletek tehát

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^K + \vec{F}_i^B \equiv \vec{F}_i, \qquad (i = 1,2,3,...,N)$$

Mint az ismeretes az „i"-ik részecskére ható belső erők

$$\vec{F}_i^B = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^B,$$

ahol $\vec{F}_{ij}^B$ a „j"-ik tömegpont által kifejtett erő. Legyenek a belső erők olyanok, hogy csak „párosával hatnak", azaz

$$\vec{F}_{ij}^B(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{F}_{ij}^B = -\vec{F}_{ji}^B$$

Vezessük be a „viriál" fogalmát a következő definícióval

$$G = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

Látható, hogy az „ötlet" nem egészen légből kapott. Hiszen „csak" az impulzus momentumnál használt vektori szorzatot kell skaláris szorzatra kicserélni. Természetesen ez fizikailag óriási változást jelent, de „matematikai játéknak" tökéletesen megfelel.

Deriváljuk mind a két oldalt az idő szerint, ekkor adódik, hogy

$$\dot{G} = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right)$$

Felhasználva a mozgás egyenleteket és a kinetikus energia, valamint az impulzus definícióit, kapjuk a következő egyenlőséget

$$\dot{G}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2},$$

azaz

$$\dot{G}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)+2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)+2E_{KIN}$$

Természetesen a rendszer teljes kinetikus energiája időben változik, $E_{KIN}(t)$.
Vegyük az egyenlet mindkét oldalának egy „T" időtartamra vett átlagát, azaz

$$\frac{1}{T}\int_0^T\dot{G}dt=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)\cdot dt+2\frac{1}{T}\int_0^T E_{KIN}dt$$

Hajtsuk vére a „$T\to\infty$" határátmenetet, azaz

$$\lim_{T\to\infty}\frac{G(T)-G(0)}{T}=\left\langle\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)\right\rangle_t+2\left\langle E_{KIN}\right\rangle_t$$

Ahol a $\langle\bullet\rangle_t$ a fent bevezetett időbeli átlagot jelenti. Ha a pontrendszerünk lokalizált, azaz $r_i\le R$ (minden „i"-re), akkor $G(t)$ mindig véges marad. Ezért az egyenlet bal oldala nullához tart. Így aztán adódik, hogy

$$\left\langle E_{KIN}\right\rangle_t=-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)\right\rangle_t$$

Azaz a tömegpont rendszer átlagos kinetikus energiája (időbeli átlag!) ismeretében következtethetünk a rendszerben(en) ható erőkre.

Határozzuk meg most a jobboldali szumma értékét!

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,K}\cdot\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,B}\cdot\vec{r}_i\right)$$

A jobb oldali második (belső erőket tartalmazó) összegzés tovább bontható, a már korábban alkalmazott ($i\leftrightarrow j$ indexcserés) módszerrel

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,B}\cdot\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}^{\,B}\cdot\vec{r}_i=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}^{\,B}\cdot\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}^{\,B}\cdot\vec{r}_j\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}^{\,B}\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\right)$$

Ezt pedig röviden így szoktuk jelölni:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,B}\cdot\vec{r}_i\right)=\sum_{\langle i,j\rangle}\vec{F}_{ij}^{\,B}\cdot\vec{r}_{ij},$$

ahol $\vec{r}_{ij}\equiv\vec{r}_i-\vec{r}_j$ és $\sum_{\langle i,j\rangle}(\bullet)$ azt jelenti, hogy a szummázást minden lehetséges „i,j"párra el kell végezni. (olyan ez, mint pl. egy társaságban a lehetséges kézfogások halmaza).
Végül is kapjuk tehát, a „viriál tétel" egyik alakját:

$$\left\langle E_{KIN}\right\rangle_t=-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,K}\cdot\vec{r}_i\right)\right\rangle_t-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{\langle i,j\rangle}\vec{F}_{ij}^{\,B}\cdot\vec{r}_{ij}\right\rangle_t$$

A következőkben egy-két példán keresztül bemutatjuk a tétel alkalmazásának igen hasznos eredményeit.

A legegyszerűbb mechanikai rendszer, ha csak egyetlen tömegpontunk van, azaz N=1. Ekkor természetesen nincsen belső erő. Tehát a viriál tétel a következő egyszerűbb alakot veszi föl

$$\left\langle E_{KIN}\right\rangle_t=-\frac{1}{2}\left\langle\vec{F}^{\,K}\vec{r}\right\rangle_t$$

Ha az erő centrális és konzervatív, akkor

$$\vec{F}^{K} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r$$

és ezért

$$\vec{F}^{K}\vec{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r\vec{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}r$$

A legtöbbször előforduló esetben az $U(r)$ (vonzó) potenciális energia egy hatványfüggvény , azaz

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n},$$

akkor

$$\vec{F}^{K}\vec{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}r = -n\frac{\alpha}{r^n} = n \cdot U$$

Ezzel pedig kapjuk a a következőt

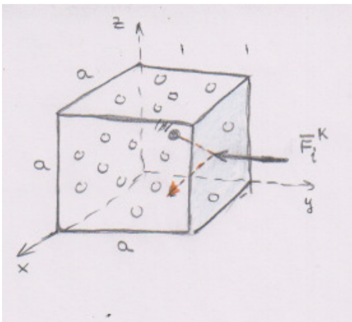
$$\left\langle E_{KIN}\right\rangle_t = -\frac{n}{2}\left\langle U\right\rangle_t$$

Tehát egyetlen részecske esetén a viriál tétel a kinetikus energia átlaga és a potenciális energia átlaga közötti kapcsolatot adja meg. Például Coulomb, vagy gravitációs térben mozgó tömegpont esetén az „n=1" és ezért

$$\left\langle E_{KIN}\right\rangle_t = -\frac{1}{2}\left\langle U\right\rangle_t$$

Jól ismert összefüggés adódik.

A következő feladatban tekintsünk egy reális gázt. Itt a tömegpontok között egy „hosszú távú" kölcsönhatás van. Azaz a részecskéknek nem kell érintkezniük egymással a kölcsönhatás során. (Pl. gravitáció vagy , Coulomb erők). Emlékezzünk rá, hogy ideális gáznál a részecskék között csak rugalmas ütközés lehetséges. Ez pedig egy rövid ható távolságú ($\rightarrow 0$) és pillanatszerű kölcsönhatás. A gázt egy „a" él hosszúságú, kocka a alakú tartályba zárjuk.



ábra

Ekkor a külső $\vec{F}_i^K$ erőket nyilvánvalóan a falakkal való $\vec{F}_i^{fal}$ kölcsönhatás adja. A gravitációtól most eltekintünk!

Illeszkedjék a kocka alakú tartály az (x,y,z) koordináta tengelyekre. A kocka egyik sarka az Origóban van és innen mérjük a tömegpontok „$\vec{r}_i$" helyvektorait is. A falakkal ütköző részecskékre ható $\vec{F}_i^{fal}$ erő a falra merőleges és a tartály belseje felé irányul. Ezért, ha az $\vec{r}_i$ a fal síkjában van, akkor

$$\vec{F}_i^{fal} \cdot \vec{r}_i = 0 \qquad i = 1,2,3,...N$$

Ez akkor van így, ha a tartály oldallapja éppen valamelyik koordináta síkban helyezkedik el. Három ilyen oldallap van, amely tehát nem ad járulékot. A másik három (az „ $x = a$ ” , „ $y = a$ ” és a „ $z = a$ ”) azonban igen. Ekkor ugyanis (mivel a falerők befelé mutatnak)

$$\left[\vec{F}_i^{fal} \cdot \vec{r}_i\right]_{x=a} = -F_{ix}^{fal} \cdot a$$

$$\left[\vec{F}_i^{fal} \cdot \vec{r}_i\right]_{y=a} = -F_{iy}^{fal} \cdot a$$

$$\left[\vec{F}_i^{fal} \cdot \vec{r}_i\right]_{z=a} = -F_{iz}^{fal} \cdot a \qquad (i = 1,2,3,\ldots N)$$

Ezek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{K} \cdot \vec{r}_i\right) \right\rangle_t = -\left\langle \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix}^{fal} \cdot a + F_{iy}^{fal} \cdot a + F_{iz}^{fal} \cdot a\right) \right\rangle_t = -a\left\{ \left\langle \sum_{i=1}^{N} F_{ix}^{fal} \right\rangle_t + \left\langle \sum_{i=1}^{N} F_{iy}^{fal} \right\rangle_t + \left\langle \sum_{i=1}^{N} F_{iz}^{fal} \right\rangle_t \right\}$$

A rendszer izotróp, emiatt miden irány (oldallap) ekvivalens. Tehát

$$\left\{ \left\langle \sum_{i=1}^{N} F_{ix}^{fal} \right\rangle_t = \left\langle \sum_{i=1}^{N} F_{iy}^{fal} \right\rangle_t = \left\langle \sum_{i=1}^{N} F_{iz}^{fal} \right\rangle_t \right\} \equiv \left\langle \sum_{i=1}^{N} F^{fal} \right\rangle_t = P^{fal} \cdot a^2$$

Hiszen itt pontosan a „ P^{fal} ” „nyomás” kinetikus gázelméleti definíciójáról van szó.

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{K} \cdot \vec{r}_i\right) \right\rangle_t = -3a\left(P^{fal} \cdot a^2\right) = -3P^{fal} \cdot a^3$$

A „P” gáznyomás azonban éppen a falnyomás (-1)-szerese, azaz $P = -P^{fal}$

Ezzel tehát

$$\left\langle E_{KIN} \right\rangle_t = +\frac{3}{2} P \cdot V - \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{F}_{ij}^{B} \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle_t$$

Ha a részecskék között nincsen kölcsönhatás (azaz nem hatnak belső erők, $\vec{F}_{ij}^{B} \equiv 0$), akkor

$$P \cdot V = \frac{2}{3} \left\langle E_{KIN} \right\rangle_t$$

Az ekviparitcio tétele miatt (lásd Termodinamika)

$$\frac{2}{3} \left\langle E_{KIN} \right\rangle_t = \frac{2}{3} N \left\{ \frac{3}{2} kT \right\}$$

Tehát

$$P \cdot V = NkT$$

Ez pedig a jól ismert ideális gáztörvény.

Reális gázoknál a molekulák között van egy $\vec{F}_{ij}^{B}$ hosszú távú kölcsönhatás így ekkor azt kapjuk, hogy

$$P \cdot V = NkT + \frac{1}{3} \left\langle \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{F}_{ij}^{B} \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle_t \qquad \text{AE}$$

Ha a gázatomok (molekulák) között ható centrális (vonzó) erő konzervatív, akkor mint azt már egyetlen tömegpontnál láttuk

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}.$$

Ekkor

$$\vec{F}^B \vec{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} r = -n\frac{\alpha}{r^n}$$

Mivel az $\langle i, j\rangle$ párok száma $N(N-1)/2$, ezért N>>1 esetén

$$\frac{1}{3}\left\langle \sum_{\langle i,j\rangle} \vec{F}_{ij}^B \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle_t = -\frac{N^2}{6}\left\langle n\frac{\alpha}{r^n}\right\rangle_t = -\frac{N^2}{6} n\langle U\rangle_t$$

Kézenfekvő feltevés, hogy sok tömegpont esetén a potenciális energia időbeli átlaga jó közelítéssel a térbeli átlaggal egyezik meg. Hiszen, ha egy adott pillanatban „lefényképeznénk a rendszert”, akkor abban a részecskék közötti „r” távolságra szinte minden értéket megtalálnánk.

$$\langle U\rangle_t \propto \langle U\rangle_r \propto \frac{1}{V}$$

Ezt beírva az AE egyenletbe és bevezetve a „a” állandó paramétert” azt kapjuk, hogy

$$P = \frac{kNT}{V} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

Figyelembe véve a gázatomok véges méretét „b” , adódik , hogy

$$P = \frac{kNT}{V - Nb} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

Ez pedig éppen a Van der Waals –féle gáztörvény

A harmadik példa a csillagászat témakörébe tartozik. Manapság a „sötét anyag” léte „köztudott”, szinte rendszeres témája a „bulvár tudománynak” is. Sokan filozófiai választ próbálnak adni erre az igen fontos és érdekes fizikai problémára, evvel is gazdagítva az „áltudományos közbeszéd” amúgy is színes palettáját.

De mi fizikusok miből következtethetünk a „sötét anyag” jelenlétére? Van-e olyan alapvető mérés, amely ezt a hipotézist kikényszeríti belőlünk. Most ezt fogjuk megvizsgálni.

Tekintsünk egy (véges méretű) galaxis halmazt! A véges méret jellemzésére egy igen „szemléletes” mennyiséget fogunk használni ez a tér egy pontjára számolt „tehetetlenségi nyomaték”. A bevezető fizika tanulmányainkban már találkoztunk egy ponthalmaznak (pl. merev testnek) egy adott tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékával.

$$\Theta_a = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 ,$$

ahol az m_i tömegű pontnak az „a” tengelytől vett távolsága R_i .Ennek az általánosításaként vezessük be a

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Mennyiséget, ahol az m_i tömegű pontnak az Origótól mért távolsága r_i. Látható, hogyha a galaxis halmaz mérete véges, akkor a Θ is az. A rendszer növekedését pedig a $\dot{\Theta}$ -al tudjuk jellemezni.

$$\dot{\Theta} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i \dot{r}_i = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = 2G$$

Ez, mint az áthatό, a Clausius-féle viriálnak a kétszerese. Az előzőekben láttuk, hogy a G igen hasznosnak bizonyult a pontrendszer átlagos dinamikai jellemzésére. Alkalmazva a már látottakat adódik a következő

$$\dot{G} = \frac{1}{2}\ddot{\Theta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

A galaxis halmaz elemeire csak belső, gravitációs vonzóerő hat. Ezért

$$\dot{G} = \frac{1}{2}\ddot{\Theta} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{B} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = 2E_{KIN} + \sum_{\langle i,j\rangle} \vec{F}_{ij}^{B} \cdot \vec{r}_{ij}$$

Beírva ide a vonzó (!) gravitációs kölcsönhatást, azaz $\vec{F}_{ij}^{B} = -\Gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\vec{e}_{ij}$, kapjuk, hogy

$$\dot{G} = \frac{1}{2}\ddot{\Theta} = 2E_{KIN} - \sum_{\langle i,j\rangle} \Gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \equiv 2E_{KIN} + E_{POT}^{gr}$$

Az összenergia a kinetikus és a potenciális energiák összege ($E_{POT}^{gr} < 0$)

$$E = E_{KIN} + E_{POT}^{gr}$$

Így tehát

$$\dot{G} = \frac{1}{2}\ddot{\Theta} = 2E - E_{POT}^{gr} = 2E + \left|E_{POT}^{gr}\right|.$$

Azaz fennáll a következő egyenlőtlenség

$$\frac{1}{2}\ddot{\Theta} > 2E.$$

Idő szerint kétszer integrálva az adódik, hogy

$$\Theta(t) > 2E \cdot t^2 + c_1 t + c_2$$

Látható, hogy a $\{c_1, c_2\}$ integrációs állandók értékétől függetlenül, a rendszer akkor stabil, ha

$$E < 0$$

Ez az ún. „Jacobi-féle stabilitási kritérium”. Azaz egy galaxishalmaz akkor stabil (azaz nem tágul a végtelenig), ha az összenergiája negatív.

Az egyes energiatagok nagyságának a (közelítő) számítása igen egyszerű

$$E_{KIN} = N\langle E_{KIN}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \approx N\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2\right) = \frac{1}{2}Nm\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}M\langle v^2\rangle$$

A levezetéskor feltettük, hogy a halmaznak minden eleme kb. (≈) ugyanakkora tömegű (azaz „m”)

Ha a galaxishalmaz egy R_0 sugarú gömbben lokalizálható, akkor összes potenciális energiája

$$E_{POT}^{gr} = -\alpha \cdot \Gamma \frac{M^2}{R_0}$$, ahol $0 < \alpha < 1$ a és a tömeg eloszlástól függ.

MEGJEGYZÉS: A halmaz gravitációs potenciális energiájának a kiszámítása ugyanúgy történik, mint azt az elektrosztatikában csináltuk amikor pl. egyenletesen töltött gömbfelület, vagy az egyenletes térfogati töltéssel rendelkező gömb össz energiáját határoztuk meg.

A stabilitás feltétele tehát

$$E = \frac{1}{2}M\langle v^2\rangle - \alpha \cdot \Gamma \frac{M^2}{R_0} < 0$$

Azaz

$$M > \frac{R_0}{2\alpha\Gamma}\left\langle v^2 \right\rangle$$

De mivel a térben minden irány egyen értékű, ezért

$$\left\langle v^2 \right\rangle = 3\left\langle v_r^2 \right\rangle$$

Ahol a $\left\langle v_r^2 \right\rangle$ radiális sebesség komponens átlagos értéke. Így végül is adódik, hogy:

$$M > \frac{3R_0}{2\alpha\Gamma}\left\langle v_r^2 \right\rangle \equiv M_{VIR} \qquad \text{(neve a „viriál tömeg”)}$$

Például a COMA gömbhalmaz esetén a következő mérési eredményeink vannak

$$\sqrt{\left\langle v_r^2 \right\rangle} = 930\ \ km/s$$

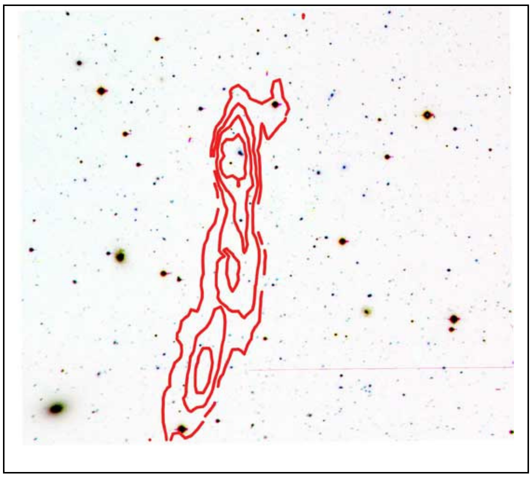
$$R_0 = 10^7\ fényév$$

A mérések tanulsága szerint

$$M_{mért} \cong \frac{1}{10} M_{VIR}$$

Ábra

Tehát a galaxishalmaz tömegének kb 10%-át látjuk, mert fényt bocsát ki, azaz világít). A többi 90% azért nem látható, mert nem bocsát ki fényt. Erre utal a neve is „sötét anyag”. A mibenléte ma még tisztázatlan bár több „aspiráns” is van a csillagászok és a részecskefizikusok fejében. A helyes válsz valószínűleg egy újabb, gazdag, eddig rejtett „Világ” felfedezését jelenti majd. A jövő fizikus nemzedéke sem fog unatkozni.



A VIRGOHI21 galaxis, amely szinte csak sötét anyagból áll (2005). Jelenléte csak a hidrogéngázra kifejtett hatásában jelentkezik. Ezen hatások mérése jelenti a detektálást.