Fázisátalakulás jellegű viselkedés közlekedési modellekben

Diplomamunka

Készítette: **Török János**

Témavezető: **Kertész János**
egyetemi tanár

BME
Fizikai Intézet, 1996.

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés

A közlekedési forgalom folytonos növekedése számos problémát vet fel. A szinte állandóan jelenlévő közlekedési dugók jelentősen megnövelik a szállítási időt és a szállítási költségeket, emellett a dugóban araszoló gépkocsivezetők számára komoly stresszhelyzetet jelent az idegölő várakozás. A városokban súlyos problémát jelent az autók által okozott környezet- és zajszennyezés.

A közlekedésből adódó problémák kezelése nagyon nehéz feladat, sok általában egymásnak ellentmondó igénynek kell megfelelniük az úthálózatoknak, a lámpák programozásának. Ezért nagyon fontos a közlekedési rendszerek alapos megismerése.

A közlekedési mérnökök általában egy-egy konkrét helyzetet próbálnak optimalizálni. Mi ezzel szemben a közlekedési rendszerek alapvető jelenségeit szeretnénk megérteni. Leegyszerűsítjük a modelleket amennyire lehet úgy, hogy az alapvető jelenségek változatlanok maradjanak. Ezt a megközelítési módot az ötvenes évektől alkalmazzák a kutatók, de a terület legnagyobb fejlődését a számítógépen szimulálható sejtautomata modellek megjelenése indította el. Ezek a sejtautomata modellek bonyolultabak mint az analitikusan kezelhetők, ezért sokkal jobb egyezést mutatnak a mérési eredményekkel.

A közlekedési problémák a sok szabadsági fokú, meghajtott rendszerek, vagyis a nemegyensúlyi statisztikus fizika keretében tárgyalhatók. Erről a témakörről még igen keveset tudunk ezért fontos ezen területek további vizsgálata. Más rendszerekkel is szoros rokonságot mutatnak a közlekedési problémák mint például a granuláris anyagok folyásával, vagy a különböző számítógépes és egyéb hálózatokkal. Ezek az analógiák is motivációt jelentenek a közlekedési témakör alaposabb ismeretére.

A dolgozatban mind az egydimenziós, mind a kétdimenziós esetet megvizsgáljuk. Az előbbi körébe tartoznak az autópálya modellek és az egyszerűbb közlekedési hálózatok, míg az utóbbi a városi hálózatokkal foglalkozik. Ehhez csatlakoznak saját eredményeim is.

Az egydimenziós esetben sokféle megközelítés lehetséges, ezeket röviden összefoglaljuk. A sejtautomata modellekkel részletesebben is foglalkozunk. Bemutatunk egy egyszerű modellt, amellyel a mérésekkel összhangban lévő eredményeket lehet kapni.

A dolgozat második részében mutatjuk be a kétdimenziós modelleket. Részletesen elemezni fogjuk a BML modell [16] zöld hullám változatát. Az ehhez kapcsolódó eredményeket a témavezetőmmel közös kutatás során sikerült elérnünk [21]. Azért választottuk ezt a modellt, mert vannak olyan valós életben megfigyelhető jelenségek, amelyet ez a modell mutat (autókonvolyok kialakulása, zöld hullám), emellett pedig sokkal jobbak szimulációs paraméterek: a futási idő körülbelül 10^3-szor kevesebb mint az eredeti modell esetében, ami lehetővé tette számunkra, hogy a statisztikus fizikában szokásos végtelenben vett határesetet is vizsgálhassuk.

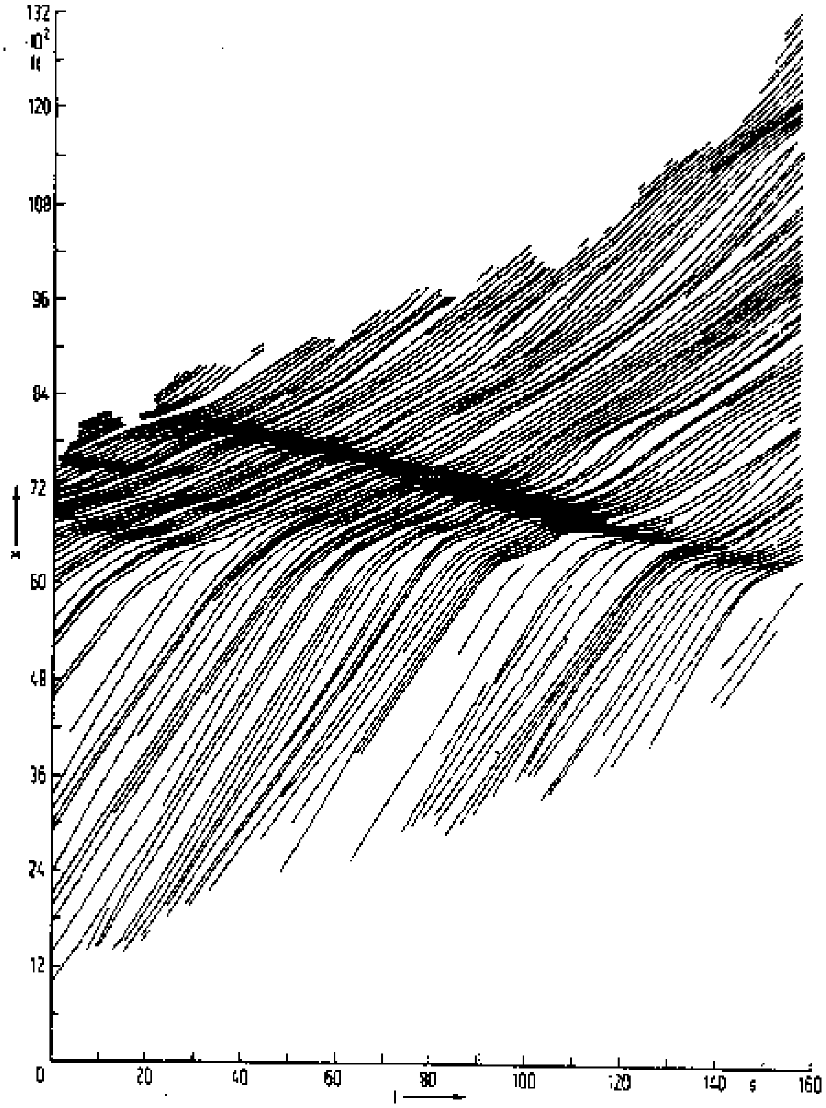
II. Egydimenziós modellek

A közlekedési modellek témakörében elért legtöbb eredmény az egydimenziós esethez kötődik. Leggyakrabban autópályákat vizsgálnak, bár ez a legegyszerűbb eset, mégis igen sok érdekes jelenséget tartalmaz. Bizonyára mindenkivel előfordult már, hogy az autópályán folyamatosan, jó tempóban autózva, egyszer csak minden látható előjel nélkül lassítani kellett. Néhány percnyi araszolás után újra felszabadul a pálya és megint a normális menettempóval lehet utazni (1. ábra). Sokszor ezen jelenségek távol vannak a balesetektől, az autópálya be-, illetve kijáratoktól. Fontos kérdés az is, hogy a vezetési stratégiák hogyan hatnak a kialakuló autóáramra, illetve van-e ideális vezetési stratégia?

A fenti jelenségek vizsgálatára használt eszközök tárháza igen széles. A modellek egy része makroszkopikus, amely átlagmennyiségek tér és időbeli változását írja le. Mikroszkopikus vizsgálatok során az egyes autókat is nyomon követik. Léteznek más megközelítési módok is mint például Prigogine [2] által használt Boltzmann–egyenlethez hasonló megfontolás. Újabban a legfontosabb eszköz a sejtautomata modellek szimulációja.

A makroszkopikus megközelítésben igen fontos szerepet játszik három mennyiség: a *sűrűség* (ϱ), az *autóáram* (j) és az autók *sebessége* (v). A sűrűség, az egységnyi úthosszon elhelyezkedő autók számát, az autóáram, egy adott keresztmetszeten áthaladó autók számát jelöli. Az autók sebességét ebből a két mennyiségből kaphatjuk meg:

$$j = v\varrho.$$

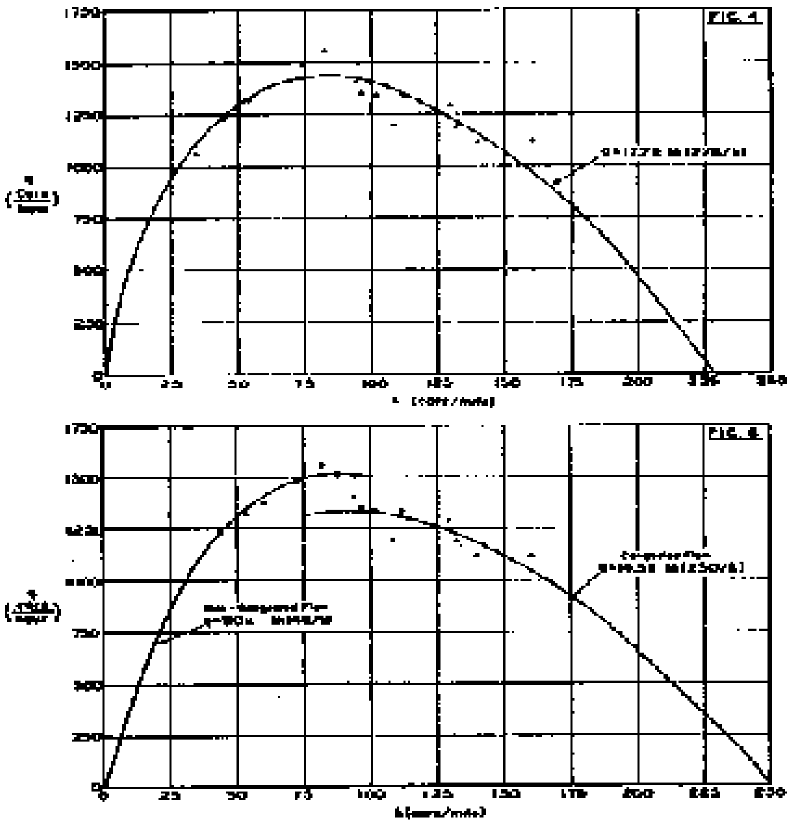


1. ábra: Helikopteres mérés egy autópályáról [1]. A vízszintes tengely az idő, a függőleges az út. A felvétel egy kétsávos autópályán készült, de csak az egyik sáv adatait tartalmazza. Az ábrán látható dugó látszólag a semmiből keletkezik.

Ha az autópályán nincs be-, illetve kijárat, akkor a következő kontinuitási egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0.$$

Az autók sűrűsége és az áram közötti kapcsolatot fejezi ki a fundamentális diagram (2. ábra). Whitham [3] megmutatta, hogy ha az áram sűrűségfüggése nem lineáris, akkor sűrűséghullámok alakulhatnak ki a rendszerben.



2. ábra: Fundamentális diagram. Az autóáram az autók sűrűsége függvényében. A pontok mérési eredmények, a folytonos görbe illesztés [9].

Különböző empírikus modellekkel [1] meg lehet határozni a $j(\varrho)$ függvény alakját. Az első modellek [5] csak azt vették figyelembe, hogy nagyobb sűrűségű részhez érve az autók lassítanak, míg ritkább résznél gyorsítanak az autók. Bonyolultabb hidrodinamikai modellekkel ki lehet küszöbölni az instabilitásokat, és meg lehet kapni azt is, hogy a fundamentális diagram maximumánál megnő a sebesség fluktuációja [6].

A hidrodinamikai modellekből kapott eredmények nem csak autópályákra alkalmazhatók, hanem kis változtatásokkal leírhatjuk velük például a gyalogos forgalmat is [7], sőt az utóbbi esetben a hidrodinamikai megközelítés még hatékonyabb mint az autópályákra.

Az első mikroszkopikus autópálya modellekben azt a feltételt használták, hogy az autóvezetők megpróbálnak biztonságos követési távolságot tartani az előttük haladótól.

$$x_n - x_{n+1} = L_0 + L_1 \dot{x}_{n+1},$$

ahol x_n az n-edik autó pozíciója, L_0 és L_1 paraméterek, a pont az idő szerinti deriválást jelenti. A későbbi modellekben az autó gyorsulására írtak fel empírikus egyenleteket [5,8]. Eleinte ezek még szingularitásokat tartalmaztak (pl. két autó közötti távolság negatívvá vált bizonyos feltételek mellett, holott a modell arra épült, hogy az autók rendezettek és nem engedünk meg előzést), de később ezeket sikerült kiküszöbölni:

$$m\ddot{x}_{n+1}(t) = \kappa \ddot{x}^m_{n+1}(t) \frac{\dot{x}_n(t-\Delta t) - \dot{x}_{n+1}(t-\Delta t)}{(x_n(t-\Delta t) - x_{n+1}(t-\Delta t))^l},$$

ahol m, l és κ paraméterek. A kísérleti eredményekkel még jobb egyezést kaphatunk, ha feltesszük, hogy van egy fázisátalakulás a fundamentális diagram maximuma környékén, és a két fázisban más–más paraméterek írják le a rendszert [9].

A sejtautomata modellekről bővebb áttekintést is adunk a következő fejezetben.

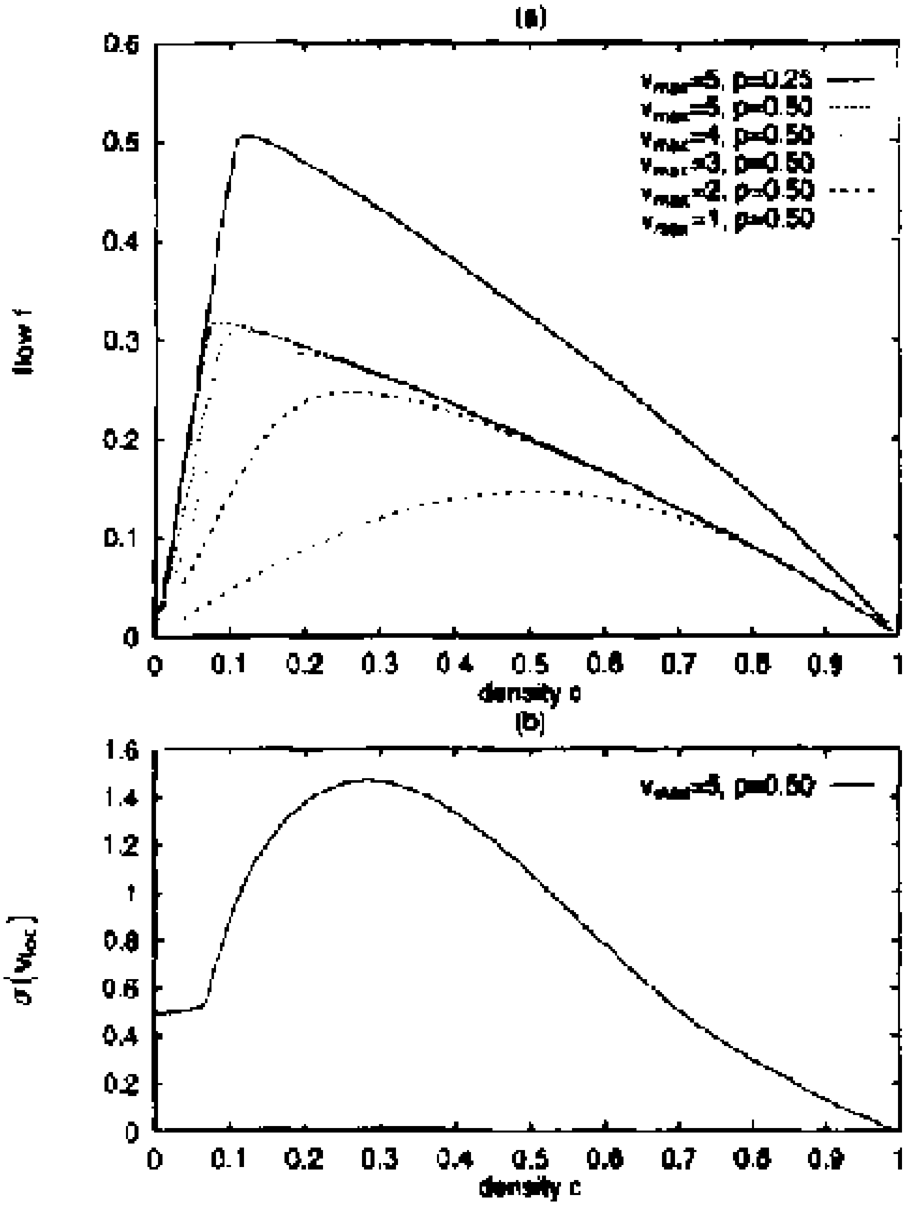
II.1 Egydimenziós sejtautomata közlekedési modellek

Az első egydimenziós közlekedési sejtautomata modellt Nagel és Schreckenberg mutatta be 1992-ben [10]. Ez egy egyszerű egysávos autópálya körgyűrű modell, ahol az autók nem előzhetik meg egymást, nem hagyhatják el az autópályát és új autók sem hajthatnak az autópályára. A sejtautomatát egy egydimenziós tömbön definiáljuk, ahol minden cellának $v_{max} + 2$ állapota van: lehet üres, illetve tartalmazhat egy autót, amelynek sebessége 0 és v_{max} között változhat és csak egész értékeket vehet fel ($v = 0, 1, \ldots, v_{max}$). Az alábbi lépéseket párhuzamosan hajtjuk végre, egyszerre az összes autóra:

- Meghatározzuk az autó előtt lévő szabad cellák számát (gap).
- *1. szabály, lassítás:* Ha az autó sebessége nagyobb mint az autó előtt lévő szabad hely mérete ($v > gap$), akkor lecsökkentjük a sebességet, hogy az autó elkerülje az ütközést ($v := gap$).
- *2. szabály, gyorsítás:* Ha az autó előtt nagyobb szabad úthossz van mint a sebessége ($v < gap$) és az autó még nem érte el a maximális sebességet ($v < v_{max}$), akkor az autó sebességét megnöveljük eggyel.
- *3. szabály, véletlen effektusok:* Ha az előző két lépés után az autó sebessége nagyobb mint nulla ($v > 0$), akkor p valószínűséggel lecsökkentjük 1-gyel

- *4. szabály, mozgás:* Minden autó előrehalad v cellát.

A harmadik szabály három jelenséget sűrít magában: (i) szabad vezetés során tapasztalható sebességfluktuációkat, amikor nincs másik autó a közelben, (ii) nem egyenletes gyorsítást, (iii) túlzott fékezést lassításnál.



3. ábra: a) Különböző maximális sebességhez tartozó fundamentális diagram a [10]-ban definiált modellre. A legfelső görbénél a véletlen paramétert a felére csökkentették. b) A sebességfluktuációk változása a sűrűség függvényében ($v_{max} = 5,\ p = 0.5$). Látható, hogy a fundamentális diagram maximuma környékén jelentősen megnőnek a sebességfluktuációk.

Az irodalomban használt $v_{max} = 5$-ös választás önkényesnek tűnhet, de ez mutat legjobb egyezést a kísérleti eredményekkel; $v_{max} \geq 2$ esetén a modell kvalitatíve ugyanazokat az eredményeket adja (például elágazó dugóhullámok). A $v_{max} = 1$ esetet analitikusan is lehet kezelni, és könnyen belátható (ugyanis, ha kicseréljük az üres cellákat ellentétes irányba mozgó autókra, az autókat pedig üres cellákra, a két modell időfejlődése ugyanaz lesz), hogy a fundamentális diagram szimmetrikus $\varrho = \frac{1}{2}$-re. Ez nem igaz a valós rendszerekre, ahol jelentős az asszimmetria, és a maximumális autóáram helye eltolódik a kisebb sűrűségek felé.

Valós méretekkel összehasonlítva a modellt, nagyságrendileg a következő számértékeket kaphatjuk [10]: egy cella körulbelül 7m hosszú, ami megfelel egy autó által a dugóban elfoglalt helynek, egy léptetés ideje 1 másodperc és a $v_{max} = 5$ körülbelül 125km/h.

Először vizsgáljuk meg elméleti szempontból a modellt. Mivel a fundamentális diagram (3.a. ábra) nem lineáris, ezért sűrűséghullámok jelennek meg, valamint egy átalakulás a szinte szabadon mozgó fázisból a jelentős méretű dugókat tartalmazó fázisba. Ez az átalakulás a fundamentális diagram maximuma környékén megy végbe, amelynek során hirtelen megnő az autók sebességének fluktuációja (3.b. ábra).

Jelöljük a fundamentális diagram maximumának helyét ϱ^*-gal. Ez a sűrűség kitüntetett jelentőséggel bír. Vizsgálva azt az esetet, amikor egy végtelen nagy dugóból indulnak el az autók, azt kapjuk [11], hogy a kifolyó autóáram sűrűsége éppen megfelel ϱ^*-nek, azaz a rendszer úgy szervezi magát, hogy a sűrűség megfeleljen a maximális áramnak.

Nagel és Rasmussen [12] a következő megfigyelést tette: nagyon kis sűrűségek esetén is megfigyelhetők dugók, de ezek nagyon hamar megszünnek. Növelve a sűrűséget a dugók élettartama is megnő, míg egy kritikus sűrűség ϱ^* felett megjelennek végtelen élettartamú dugók is. Méréseik szerint ez az irányított perkolációhoz hasonló átalakulás megfeleltethető a fent említett szabad mozgás–dugó átalakulásnak.

Ezzel szemben Csányi és Kertész [13] szerint ez csak véletlen egybeesés, és ha más p-t választunk (az irodalomban elterjedt 1/2 helyett sokkal kisebbet, pl. 1/4), akkor a perkolációs és a szabad mozgás–dugó átalakulás szétválik, és a szabad mozgás–dugó átalakulási pontnál sokkal magasabb sűrűségértékeknél sem fordul elő végtelen élettartamú dugó.

Csányi és Kertész egy másik mennyiséget javasolt a szabad mozgás–dugó átalakulás vizsgálatára. Definiáltak egy relaxációs időt, amely jó paraméternek bizonyult az átalakulás jellemzésére. A τ relaxációs időt a mért sebesség időbeli függvénye és a rövididejű határeset és a hosszúidejű asszimptóta közötti területtel definiálunk:

$$\tau(\varrho) = \int_0^\infty (\min(v^*(t), \langle \bar{v}_\infty \rangle) - \langle \bar{v}(t) \rangle) \mathrm{d}t,$$

ahol $\langle \cdots \rangle$ a kezdőfeltételekre való átlagot, $v^*(t)$ a nem kölcsönható (1. szabály nélküli) rendszer átlagsebességét és $\bar{v}_\infty$ a rendszer átlagsebességét jelöli $t = \infty$-ben. Ez a τ relaxációs idő csak a fundamentális diagram maximuma környékén rendszerméret függő, egy határozott maximummal. Csányi és Kertész számításai szerint a csúcs magassága és szélessége kielégíti a végesméret skálázást.

Nagel és Paczuski [14] megvizsgálta a dugók kialakulását és szerkezetét. Ők a modellnek egy módosított változát használták, az úgynevezett „cruise control" határeset, ahol a véletlenszerű lassítást nem alkalmazták a maximális sebességgel mozgó autókra. A nem egyenletes lassítást és a túlzott fékezést továbbra is megengedték a modellben. A fundamentális diagram különbönbözik az eredeti modellétől, ugyanis bizonyos sűrűség alatt a dinamika képes úgy elrendezni az autókat, hogy azok mindegyike maximális sebességgel mozogjon, míg az eredeti modellben mindig megfigyelhetők kisebb–nagyobb dugók.

Ez a modell is mutatja azt a jelenséget, hogy egy végtelen dugóból kiáramló autók sűrűsége megegyezik a fundamentális diagram maximumának helyével, sőt egy zárt körgyűrű esetén (periodikus határfeltételek) is megfigyelhetjük ezt az önszerveződést, ugyanis a mező két fázisra válik szét: lesz egy tartomány, ahol az autók lassan araszolnak egy dugóban, míg a körgyűrű többi részén maximális sebességgel haladnak és az autók sűrűsége éppen ϱ^*. Az eredeti modellben ez a jelenség nem figyelhető meg, mivel az állandóan keletkező dugók miatt idővel „kiszáradhatnak" a régebbi dugók. Ezt alátámasztja a dugók élettartalmának eloszlásában megfigyelhető exponenscsökkenés [11].

A „cruise control" modellben mért dugó élettartam ($P(t)$) eloszlás igen széles skálán hatvány függvény viselkedést mutat:

$$P(t) \sim t^{-(\delta+1)}.$$

A szimulációk szerint [14] a δ exponens nagyon közel van az 1/2-hez, ami megegyezik a véletlen bolyongás exponensével. Az analógiát $v_{max} = 1$

esetén egzaktul be lehet bizonyítani, míg $v_{max} > 1$ esetén a skálázáshoz logaritmikus korrekciók járulnak.

Egy másik modellel vizsgálták a vezetési stratégiákat is [15]. Megállapították, hogy a sebességek fluktuációja, a felhasznált üzemanyag mennyisége, a közlekedési dugók száma jelentősen csökken, ha az autóvezetők a lokális közlekedési helyzetnek és az autó típusának megfelelően választják meg a vezetési stratégiájukat. Az utazási idő azonban nem változik.

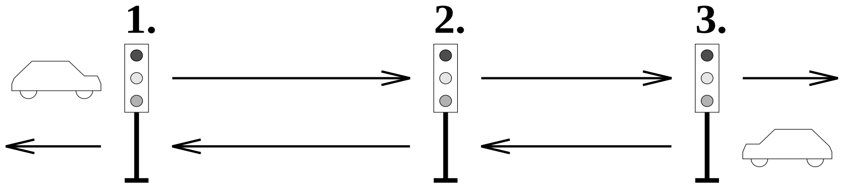
III. Kétdimenziós modellek

A városi közlekedési hálózatok viselkedéséről sokkal kevesebbet tudunk mint az egydimenziós problémákról. A kétdimenziós eset bonyolultsága miatt a vizsgált modellek általában nagyon egyszerűek, és a valóságtól nagyon elrugaszkodottnak tűnnek. Ennek ellenére a valóságban megfigyelhető jelenségeket lehet velük reprodukálni, és ezek alapvető mechanizmusát lehet tanulmányozni.

Először mindennapi tapasztalataink alapján vegyük sorba a városi közlekedés alapvető problémáit. A városi úthálózatokban rendkívül sűrűn fordulnak elő kereszteződések. Ha az autó főútvonalon halad, vagy zöld lámpát kap, akkor gyakorlatilag lassítás nélkül át tud haladni a kereszteződésen. Az alárendelt irányból érkező autóknak meg kell állniuk, vagy legalábbis lassítaniuk kell. Erős forgalom esetén előfordulhat, hogy az alárendelt útról érkező autók nem tudnak ráhajtani a főútvonalra (ez a jelenség megfigyelhető csúcsidőben Budapesten, illetve nyáron a Balaton mellett is.) Ilyen esetben a forgalom fenntartása érdekében közlekedési lámpákkal szokták megoldani a forgalomirányítást. Ezzel az a probléma, hogy a nagyobb forgalmú utat is megállítja egy kis ideig, a lámpák váltásának ideje alatt pedig egyik irányban sem halad autó.

Az első problémát, meg lehet oldani úgy, hogy zöld hullámnak megfelelően programozzák a lámpákat. Ez egy nagyon nehéz és bonyolult feladat. Egy úthálózatban ez gyakran elméletileg sem lehetséges az egymásra merőleges irányokban a zöld hullám megvalósítása, de vannak olyan esetek, amikor még egy úton belül sem lehet megoldani a problémát (4. ábra).

Ugyanígy nincs egyértelműen jó lámpaváltási periodus sem. Ha rövid az intervallum, akkor sok lesz a holtidő, amíg nincs autó a kereszteződésben; ha hosszú az intervallum, akkor az autósoknak túl sokáig kell várakozniuk a piros lámpáknál, ami igen jelentős stresszhelyzet okoz, és nagy forgalom esetén teljesen feltöltődhet a rendelkezésre álló útszakasz, ami felgyorsítja a dugók kialakulását.



4. ábra: A balról jobbra haladónak akkor van zöldhullám, ha a lámpák az 1, 2, 3 sorrendben váltanak, míg a jobbról balra haladónak épp a fordított sorrend volna jó.

Másik nagy problémája a lámpaprogramozásnak, hogy a különböző időszakokban más-más az igény. Reggel a városba befelé menő forgalom az erősebb, este pedig a kifelé tartó; a zöldhullámra beállított lámpák dugó esetén gyakorlatilag teljesen blokkolják a forgalmat, mivel először a leghátsó lámpánál álló autók mehetnek először, hogy később zöldet kapjanak az előtte lévő lámpánál. Dugóban viszont az előttük lévő útszakasz teljesen telített, így gyakorlatilag alig tudnak előre haladni. Jelenleg még nagyon ritkán alkalmaznak forgalomtól függő lámpavezérlést.

A gyakorlatban ezekkel a problémákkal a közlekedési mérnökök foglalkoznak, és általában konkrét esetekre probálnak minél jobb megoldást találni. Emellett fontos az elméleti háttér alapos megértése is. Kétdimenziós esetben a legfontosabb vizsgálati eszköz a számítógépes szimuláció, emellett speciális esetekre létezik még néhány átlagtérszerű eredmény is [17].

A következő fejezetekben áttekintünk néhány alaposabban vizsgált modellt, melyek közül az egyiket részletesebben is elemezzük.

III.1. A BML–modell

Biham, Middleton and Levine [16] bemutatott egy sejtautomata modellt, amely egyszerűsége miatt alkalmas átfogó vizsgálatra, viszont visszaadja azt a mindennapi életben is megfigyelhető jelenséget, hogy van egy viszonylag éles átmenet a két fázis között, amikor az autók közel maximális sebességgel mozognak és amikor csak araszolnak a dugóban.

Ugyanez az átalakulás a modell módosított változataiban is megfigyelhető, ahol véletlen kanyarodásokat és kétszintes útkereszteződéseket is figyelembe vettek [17-21].

A Biham, Middleton and Levine [16] által bemutatott sejtautomata modellt (BML modell) egy négyzetrácson definiálták. A rácspontok jelölik az útkereszteződéseket. Minden rácspont három különböző értéket vehet fel: lehet üres, vagy tartalmazhat egy jobbra vagy egy felfelé haladó autót. A forgalmat közlekedési lámpák irányítják oly módon, hogy a páratlan sorszámú lépésekben csak a jobbra haladó autók léphetnek, míg a páros sorszámú lépésekben a felfelé haladók. A modellt periodikus határfeltételek mellett vizsgálták.

A szimulációkat véletlen kezdőfeltételből indították. Bizonyos idő alatt a rendszer elér egy határciklust, amelyből kétféle típust figyeltek meg: a dinamikai határciklust, amelyben minden autó szabadon mozog és a statikus határciklust, amelyben minden autó áll. A rendszerben egy igen éles átalakulás található, ami elválasztja egymástól az alacsony sűrűségű dinamikus fázist és a nagy sűrűségű statikus fázist. Ez az úgynevezett *jamming transition*, azaz a szabad mozgás–dugó átalakulás.

Biham, Middleton és Levine [16] vizsgálta a modell nem determinisztikus változatát is. Ekkor minden lépésben mozoghat mindkét autótípus, ha két autó egyszerre szeretne ugyanarra a cellára lépni, akkor véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel kiválasztjuk, hogy melyik autó fog haladni. A modell szintén mutatja a szabad mozgás–dugó átalakulást, de az átalakulási pontok sokkal alacsonyabbak (~ 0.2-vel).

Nagatani [19] a kétszintes kereszteződések hatását vizsgálta a BML modellben. A szimuláció megkezdése előtt az alaprácson véletlenszerűen elhelyezett bizonyos mennyiségű (c, $0 \geq c \geq 1$) kétszintes kereszteződést. Ez azt jelenti, hogy azaokon a cellákon, ahol kétszintes kereszteződés van, egyszerre tartózkodhat egy felfelé haladó és egy jobbra haladó autó is.

Nagatani mérései szerint a szabad mozgás–dugó átalakulás egészen addig jelen van, amíg c értéke el nem éri a perkolációs küszöböt. Egyszerű átlagtér számolással sikerült visszakapnia a sűrűség, c fázisdiagram jellemzőit.

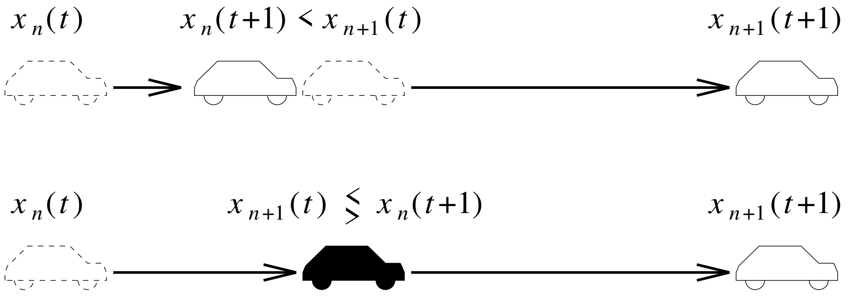
Molera *et al.* a modellnek egy teljesen sztochasztikus változatát vizsgálta elméleti módszerekkel. Kétféle autótípust vezettek be. Az egyik típus γ valószínűséggel jobbra, $1-\gamma$ valószínűséggel felfelé haladt, a másik típus $1-\gamma$ valószínüséggel jobbra, γ valószínűséggel felfelé.

Az egzakt mikroszkopikus egyenletből kiindulva, a térbeli korrelációkat egy részecske átlagokként felírva elég jó közelítéshez jutottak. A szabadon mozgó fázisban a sebesség–sűrűség görbék γ független exponensét pontosan megkapták, megmagyarázták a szabad mozgás–dugó átalakulást, de γ független exponenssel. Egy Boltzmann közelítéssel sikerült megmagyarázni a blokkolt fázisban létrejövő fázisszeparációt a két autótípus között és sikerült becslést adni a különböző sávok egymás közötti távolságára is.

Todaki és Kikutchi a BML modell viselkedését vizsgálta a blokkolt fázisban. Azt tapasztalták, hogy a szabad mozgás–dugó átalakulásnál jóval magasabb sűrűségeknél fellép még egy átalakulás, amely a dugóra jellemző alakzat teljes eltűnésével van kapcsolatban. Ezt a térbeli korrelációs függvény viselkedésén lehetett megfigyelni.

III.2. A zöld hullám modell

A sejtautomaták általában párhuzamos léptetésűek, vagyis egy lépésben csak az előző állapotot vesszük figyelembe, és egy rácspont új állapota független a többi pont új értékétől. A közlekedésben ez a gondolkodásmód nem mindig helytálló, mivel az autósok úgy vezetnek, hogy figyelembe veszik, hogy a többi autós is hasonló gondolkodásmód szerint vezet. Ez a gyakorlatban például azt jelenti, hogy a követési távolság megválasztásánál nem csak az előtte lévő autó helyzetét veszi figyelembe az autóvezető, hanem annak sebességét, gyorsulását és a sokkal előbbre lévők adatait is.



5. ábra: A párhuzamos sejautomata modellekben a hátrább lévő autó nem tud túlhaladni az előző pozicióján, mivel a léptetés során csak a helykoordinátákat vesszük figyelembe és így nincs információnk arrol, hogy az elöl lévő autó képes-e haladni. A valóságban a követési távolságok kiválasztásánál az autósok figyelembe veszik, hogy mi történik az előttük lévő autóval.

Az egyszerű párhuzamos léptetésű sejtautomata közlekedési modellekben, ahol a következő állapot csak az autók helyétől függ, az autók nem tudnak egy lépésben túlhaladni az előttük álló autó pillanatnyi helyen (lásd 5. ábra). Ezért mi egy soros léptetésű sejtautomata modellel fogunk foglalkozni, ahol az autók sokkal szorosabban tudják követni az előttük haladót. A változtatás egy másik interpretációja, hogy a lámpákat szinkronizálják, ezáltal lehetővé teszik a *zöld hullám* kialakulását.

Itt bemutatjuk a Zöld Hullám Modellt (ZHM), egy sejtautomatát a kétdimenziós közlekedési folyamatok szimulálására. A modellt témavezetőmmel együtt vizsgáltuk. Ez a BML modell soros léptetésű változata, amelyet egy $L \times L$-es négyzetrácson definiálunk. A párhuzamos (BML) modellben egy lépés során azok az autók haladnak egy mezőt előre, amelyeknek zöld a lámpa és előttük üres mező található. A zöld hullám modell abban különbözik, hogy egy autó akkor is mozoghat, ha az előtte lévő mező az adott lépésben válik üressé. A 6. ábra szemlélteti a két modell közti különbséget.

BML modell	Zöld hullám modell	Idő
→ → → ␣ ␣ ␣ ↑	→ → → ␣ ␣ ␣ ↑	0
→ → ␣ → ␣ ␣ ↑	␣ → → → ␣ ␣ ↑	2
→ ␣ → ␣ → ␣ ↑	␣ ␣ → → → ␣ ↑	4
→ ↑ → ␣ → ␣ ␣	␣ ↑ → → → ␣ ␣	5
→ ↑ ␣ → ␣ →	␣ ↑ ␣ → → →	6

6. ábra: A BML és a zöld hullám közötti különbség szemléltetése. Az ␣ karakter üres cellát jelöl. Jól látható, hogy a zöld hullám modellben együtt marad a konvoj, míg a BML modellben teljesen szétszakad és a keresztező irány autói fognak előbb áthaladni.

Megfigyelhető, hogy a BML-modellben egyedülálló autók mozognak, míg a zöld hullám modellben az egyirányba mozgó, egymás mellett lévő autók (*konvojok*) együtt mozognak. A BML modellben két autó nem tud együtt mozogni, hiszen a második azt tapasztalja, hogy az előtte levő mező foglalt és addig nem tud mozogni, míg az első el nem hagyta a helyét. A zöld hullám modellben viszont nincs olyan hatás, ami megbontana egy konvojt.

A modellt periodikus határfeltételekkel vizsgáltuk, ez azt jelenti, hogy ha egy autó elhagyja a négyzetrácsot az egyik oldalon, akkor a másik oldalon ugyanazon a helyen lép be. Ez $2L$ megmaradási feltételt eredményez, mivel a vízszintesen haladó autók száma a szimuláció során állandó marad az egyes sorokban, ugyanígy a felfelé haladó autók száma is megmarad az oszlopokban. Kezdetben az autókat véletlenszerűen helyezzük el a rácson, és ebből az állapotból indítjuk a szimulációt. A szimmetrikus esetet vizsgáltuk, amikor is ugyanannyi felfelé haladó autó ($N_\uparrow$) van mint jobbra haladó ($N_\rightarrow$), ezért a két autótípus együttes sűrűségét használtuk paraméterként:

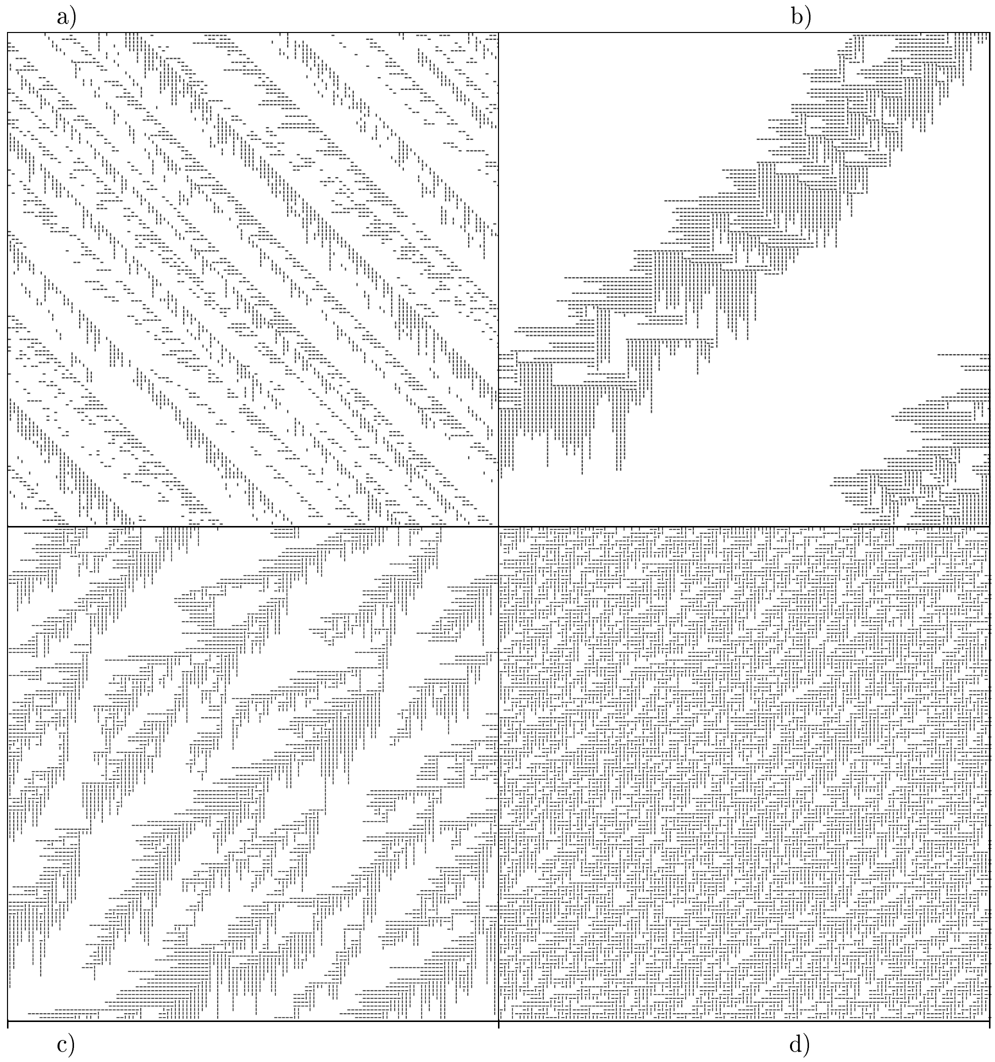
$$\varrho = \frac{N_\rightarrow + N_\uparrow}{L^2}.$$

A realisztikus elemek mellett a legfontosabb érv a zöld hullám modell mellett a gyors konvergencia. Az átalakulási pont környékén a zöld hullám modellben 10^4-szer kevesebb lépés szükséges a végállapotok eléréséhez. Az átalakulási ponttól távol ez az arány kisebb, nagyságrendileg 10^2. Ez tette lehetővé számunkra, hogy nagy rendszereket is nagy pontossággal vizsgálhassunk és így a termodinamikai határesetbeli viselkedést megbecsüljük.

III.3. A szimulációk leírása

A szimulációkat közepes méretű munkaállomásokon végeztük. Az általunk vizsgált legkisebb rendszer 32×32-es volt, ami már véges méret hatást mutatott, ezért nem láttuk értelmét kisebb rendszerek vizsgálatának Egy multi–spin kódoló algoritmusnak (lásd az A mellékletet) köszönhetően képesek voltunk 1024×1024-es rendszerek szimulálására is.

Kezdetben az autók véletlenszerűen helyezkednek el a négyzetrácson. Ebből az állapotból indítjuk a szimulációt. Egy tranziens szakasz után a rendszer elér egy határciklust. Ez akkor alakul ki, ha egy konfiguráció megismétlődik. Mivel a modell determinisztikus, ezért ezután mindig csak ugyanazokon a konfigurációkon fog végighaladni.



7. ábra: Az a) ábra egy szabadon mozgó határciklust mutat $\varrho = 0.27$ sűrűségnél, a b), c), d) ábrák blokkolt határciklust szemléltetnek rendre $\varrho = 0.27,\ 0.45,\ 0.80$ sűrűségeknél. A rendszerméret 128×128.

Ha a rendszerméret elég nagy, akkor mindössze kétféle határciklus létezik (7. ábra): az egyik a *szabadon mozgó* határciklus, ahol minden autó akadálytalanul mozog, a másik a *blokkolt* határciklus, ahol egyetlen autó sem mozog. A szabadon mozgó határciklusban az autók átlagsebessége megegyezik a maximális sebességgel ($\bar{v} = v_{max} = 1$), a periódusidő $2L$ lépés, azaz L vízszintes és L függőleges lépés, ekkor ugyanis minden autó visszaérkezik az előző helyére. A blokkolt határciklus esetén az autók átlagsebessége 0, a periódusidő 1 lépés. Kisebb ($L \leq 128$) rendszereknél előfordult egy harmadik típusú határciklus is, amikor az átlagsebesség soha nem éri el sem a 0, sem az 1 értéket ($0 < \bar{v}(t) < 1$).

A szimulációt, nyilván csak addig érdemes folytatni, amíg a rendszer el nem éri valamelyik határciklust. Ezért a szimuláció során el kell dönteni, hogy a rendszer elérte-e már a határciklust, vagy még mindig a tranziens szakasz tart.

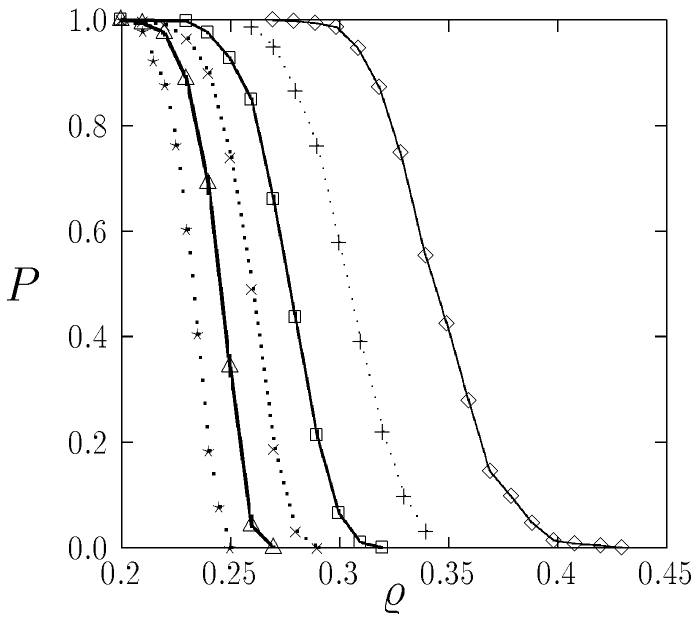
A konfigurációk összehasonlítása nagyon időigényes és gyakorlatilag kivitelezhetetlen feladat, ezért más módszerhez folyamodtunk. Az átlagsebesség vizsgálatával el lehet dönteni, hogy a rendszer elérte-e a szabadon mozgó, vagy a blokkolt határciklus valamelyikét. Ha az átlagsebesség egyszer lecsökken 0-ra, akkor blokkolt határciklushoz értünk, ha az átlagsebesség $2L$ lépésen keresztül 1 értéket vesz fel, akkor a rendszer szabadon mozgó határciklushoz jutott.

A harmadik határciklus azonosítása nehezebb feladat. Ezt úgy oldottuk meg, hogy próbafuttatások során megmértük, hogy mennyi idő szükséges az előző két határciklus valamelyikének eléréséhez. A legnagyobb mért időnél egy-másfélszer nagyobb nagyságrendű időlimitet választottunk. Ha ez idő alatt a rendszer nem érte el a blokkolt, vagy a szabadon mozgó határciklus valamelyikét, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer harmadik típusú határciklushoz ért.

A méréseket úgy hajtottuk végre, hogy adott sűrűség és rendszerméret esetén, különböző kezdőfeltételekre átlagoltuk a kapott eredményeket. Ha az alaprács kisebb 1024×1024, akkor minden mérési pontban $500 - 1000$, míg 1024-es rendszerméretnél mindössze $50 - 200$ eseményre átlagoltunk. A mérések során rögzítettük, hogy az adott mérésnél milyen határciklushoz jutott a rendszer. Az eredmények analizálása során csak azokkal az esetekkel foglalkoztunk, amikor a határciklus blokkolt, vagy szabadon mozgó. Azokat a futásokat, ahol a határciklusban az átlagsebesség nem 0 és nem 1 ($0 < \bar{v} < 1$), figyelmen kívül hagytuk az eredmények kiértékelésnél. Ez nem okozott nagy adatveszteséget, ugyanis ez csak kis rendszereknél ($L \leq 128$) fordult elő igen kis számban.

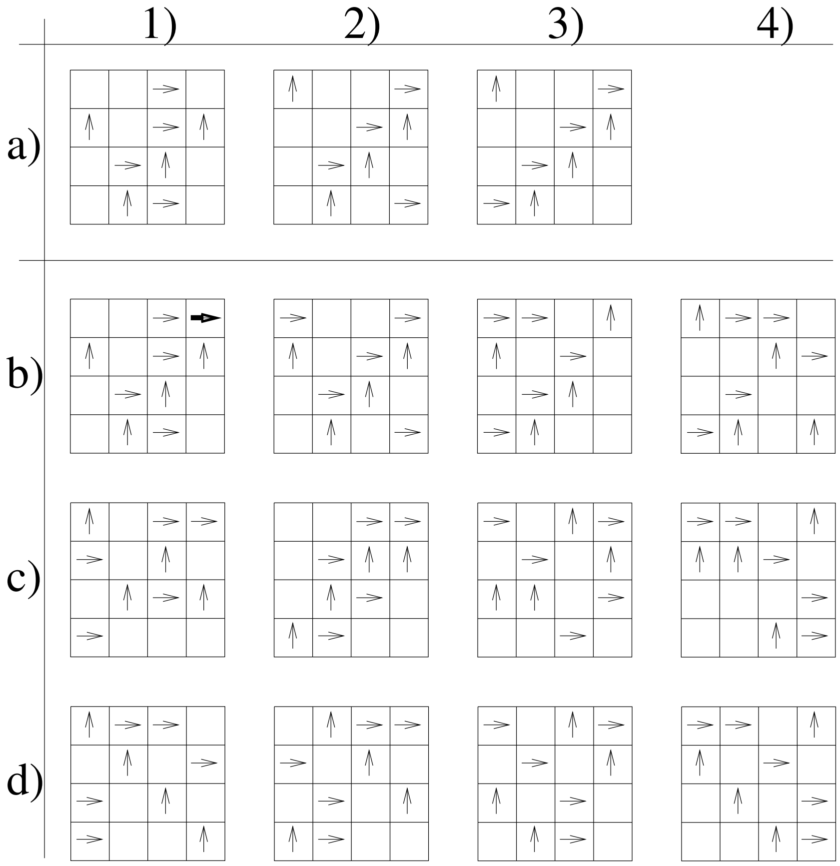
III.4 Szabad mozgás – dugó átalakulás

Alacsony sűrűségeknél csak szabadon mozgó, míg magas sűrűségeknél csak blokkolt fázis figyelhető meg. Van azonban egy szűk átmeneti tartomány, ahol mindkét határciklus megfigyelhető (8. ábra). Ez a tartomány a rendszerméret növekedésével egyre szűkebbé válik. Tehát, a BML modellhez hasonlóan a zöld hullám modell is mutat egy éles átmenetet a szabadon mozgó és blokkolt fázisok között. Ezt nevezzük *szabad mozgás – dugó átalakulás*nak.



8. ábra: Szabadon mozgó határciklus elérésének valószínűsége P a sűrűség függvényében. A szimbólumok rendre a következő rendszerméretnek felelnek meg: $\star : L = 1024$, $\triangle : L = 512$, $\times : L = 256$, $\square : L = 128$, $+ : L = 64$, $\diamond : L = 32$. A későbbiekben is ugyanezek a szimbólumok fogják jelölni a megfelelő rendszerméretekhez tartozó görbéket.

Először a perkolációs modelleknél megszokott eljárással próbáltuk meghatározni az átalakulási pont helyét. Kiindulunk egy véletlenszerű kezdeti konfigurációból, amely blokkolt határciklushoz vezet. Ezután sorban addig veszünk el autókat a kezdeti konfigurációból, amíg szabadon mozgó határciklust nem kapunk és ezzel határozzuk meg az adott konfiguráció pontos átalakulási pontját. Az eljárás gyakorlati megvalósítása során meglepő eredményre jutottunk, ugyanis az átalakulás nem monoton. Ez azt jelenti, hogy ha egy adott kezdeti konfiguráció blokkolt határciklushoz vezet, akkor ugyanehhez a kezdeti konfigurációhoz hozzáadva még egy autót, nem biztos, hogy újra dugóhoz jutunk, hanem elképzelhető, hogy szabadon mozgó határciklust kapunk. A 9. ábra egy ilyen esetet szemléltet kis rendszerméret esetén. Ez a jelenség nem véges méret effektus, mivel nagyobb rendszerek felé autószámban mérve növekszik az a tartomány, ahol ez a határciklus váltakozás megfigyelhető, és túl nagy ahhoz, hogy részletesen megvizsgáljuk.

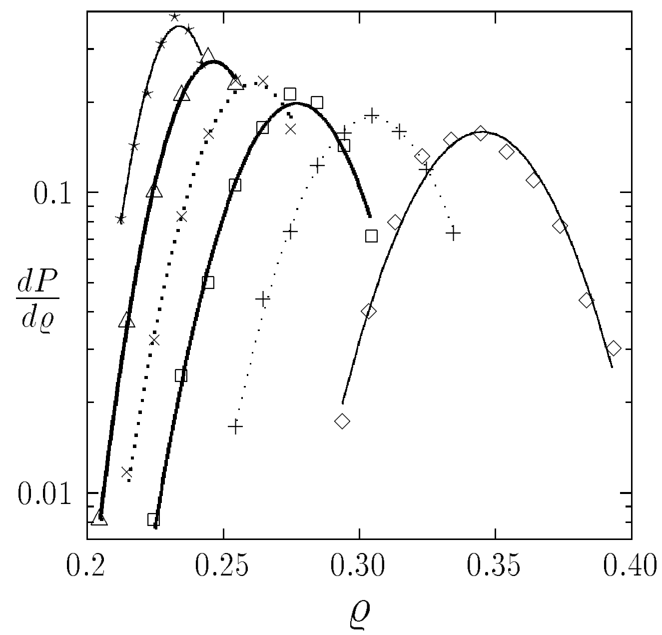


9. ábra: Az a/1 helyen található konfigurációból kiindulva blokkolt határciklushoz jutunk (a/3). A b/1 helyen az a/1 konfigurációhoz hozzávettük még a vastagon kihúzott nyilat, így a b/1-ben a sűrűség nagyobb lett mint az a/1-ben. Innét indítva a modellt Szabadon mozgó fázishoz jut (d/4).

A szabad mozgás – dugó átalakulás vizsgálatához adott rendszerméret és sűrűség esetén különböző kezdőállapotból indított szimulációk eredményének átlagát vizsgáltuk. Megszámoltuk, hogy milyen arányban fordul elő a két határciklus adott sűrűségeknél. Legyen $\mathcal{N}_{\text{szabad}}$ (ill. $\mathcal{N}_{\text{dugó}}$) azon kezdőállapotok száma, amelyek szabadon mozgó (ill. blokkolt) határciklushoz vezetnek. Adott rendszerméret és sűrűség esetén vezessük be a következő mennyiséget:

$$P(L,\varrho) = \frac{\mathcal{N}_{\text{szabad}}}{\mathcal{N}_{\text{szabad}} + \mathcal{N}_{\text{dugó}}},$$

ami sztochasztikusan konvergál annak valószínűségéhez, hogy egy véletlen kezdőállapot szabadon mozgó határcilushoz vezet. Definiáljuk a szabad mozgás és blokkolt fázisok közötti $\varrho_c(L)$ átalakulási pontot L méretű rendszer esetén a $P(L,\varrho)$ görbék maximális deriváltjának helyével. Ezen pontok megkereséséhez feltettük, hogy a deriváltfüggvények Gauss-görbék. A gyakorlatban tehát, a differenciafüggvényekre illesztettünk Gauss–függvényt (10. ábra) és ennek a maximumával határoztuk meg a $\varrho_c(L)$ átalakulási pontokat. Az átalakulási pont rendszerméret függését a következő skálahipotézissel vizsgáltuk:



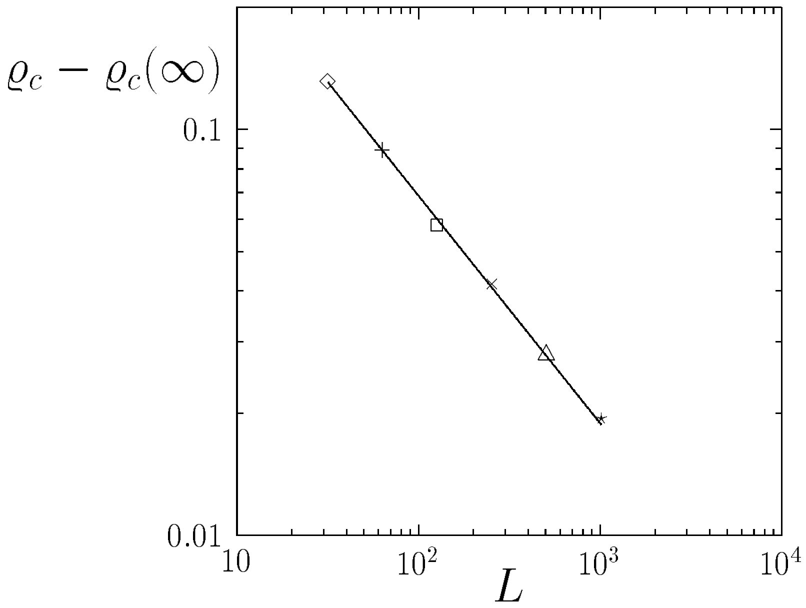
10. ábra: Gauss–görbék illesztése a $P(\varrho)$ függvények deriváltjára.
A Gauss-görbék paramétereiből számoltuk ki $\varrho_c(L)$-T és $\sigma(L)$-t.

$$(\varrho_c(L) - \varrho_c(\infty)) \sim L^{-\frac{1}{\nu}}, \qquad (1)$$

ahol $\varrho_c(\infty)$ a végtelen rendszer átalakulási pontja. A mérések igazolták a skálahipotézist (11. ábra) és a következő számértékeket kaptuk:

$$\varrho(\infty) = 0.215 \pm 0.02,$$

$$\nu = 1.8 \pm 0.2.$$



11. ábra: Az (1) skálahipotézis ellenőrzése. Az y tengelyen a végtelen rendszer kritikus pontjával redukált sűrűség szerepel. Az egyenes meredeksége 1.8.

A véges méret skálázást ki lehet terjeszteni az átalakulási tartomány szélességének (σ) változására is:

$$\sigma \sim L^{-\frac{1}{\nu'}},$$

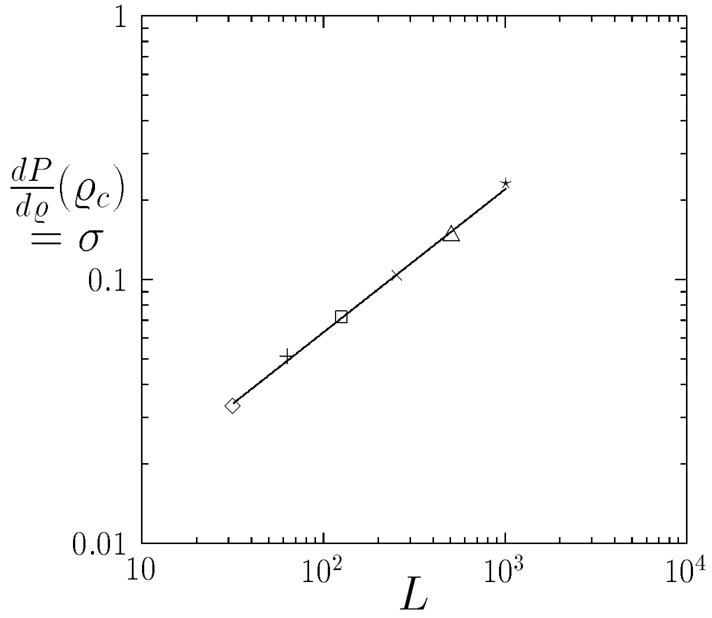
ahol $\nu' = \nu$. A szélességet az átalakulási ponthoz hasonlóan a $P(L, \varrho)$ görbék deriváltjának maximumával definiáljuk. A numerikus deriválás felnagyítja a hibákat, ezért illesztés előtt kénytelenek voltunk simítani a görbéket. Ezt egy egyszerű három pont nagyságú négyszögletes ablakfüggvénnyel végeztük. Az előző esethez hasonlóan itt is Gauss–görbék illesztésével határoztuk meg a maximum értékét (10. ábra). A $\sigma - L$ függvényre illesztett exponens értéke (12. ábra):

$$\nu' = 1.7 \pm 0.2,$$

ami hibán belül egyezik ν-vel.

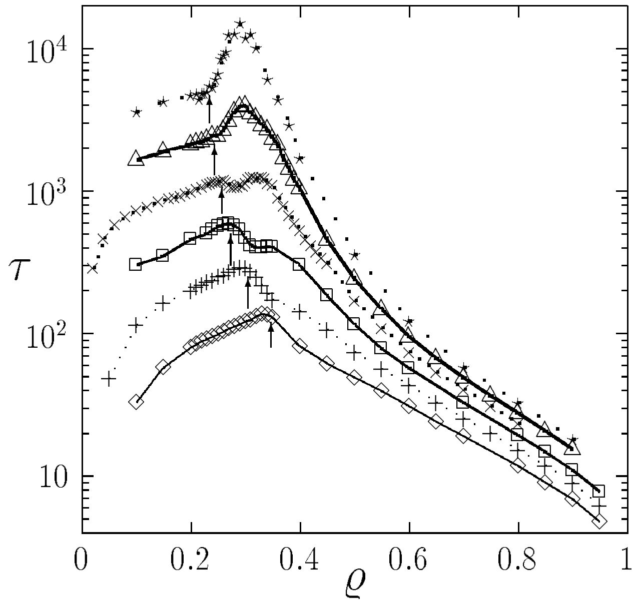
Megemlítjük, hogy ν' értéke nagyon bizonytalan. Kipróbáltunk más definíciókat is (pl. a sűrűségkülönbség azon két pont között, ahol

$P(\varrho)$ értéke p'-ről $1-p'$-ra változik, vagy a $P(\varrho)(1-P(\varrho))$ függvényre illesztett Gauss–görbe szélessége), és ekkor az illesztés sokkal instabilabb volt és az exponensekre is kissé más értéket (~ 2.0) kaptunk. Figyelembe véve ezeket a megközelítéseket, a hibakorlátot legalább kétszer ekkorának kellene választani ($\sim 0.3-0.4$), és ez már megkérdőjelezheti a skálahipotézis érvényességét. Mérési adataink pontosságából azonban ezt a kérdést nem lehet egyértelműen eldönteni.



12. ábra: Az átalakulás szélességének skálázása a rendszerméret függvényében. Az átalakulás szélességét a szabadon mozgó határciklus valószínűségének deriváltjának maximumával definálјuk. Az egyenes meredeksége 1.7.

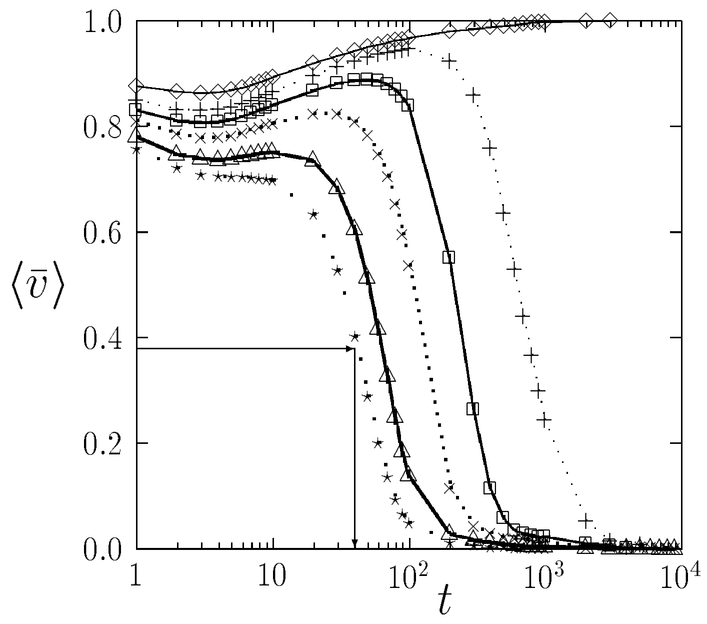
A dinamika vizsgálatára megmértük a relaxációs időt (τ), ami ahhoz szükséges, hogy a rendszer a kezdőállapotból kiindulva elérje valamelyik határciklust. Az eredmény, mely a 13. ábrán látható, igen érdekes jelenségeket mutat és jelentősen eltér a szokásos relaxációs idő görbéktől. A maximumok közvetlen környékét kivéve minden pontban igaznak tűnik a következő összefüggés: $\tau \sim L^{z(\varrho)} + L_0(\varrho)$. A $\tau(\varrho)$ függvénynek nagyon bonyolult a viselkedése ϱ_c környékén. Kis rendszereknél ϱ_c-hez közel van egy csúcs, amely nagy rendszereknél eltűnik, és helyette egy új csúcs jelenik meg magasabb sűrűségeknél. Az alacsonyabb sűrűségnél található csúcs jó közelítéssel megfeleltethető a szabad mozgás dugó átalakulásnak.



13. ábra: A τ relaxációs idő a sűrűség függvényében. A szimbólumok ugyanazt a méretet jelentik mint a 8. ábraán. A relaxációs idő nagyon függ a sűrűségtől és van olyan rendszerméret, ahol két lokális maximuma is van a görbének (128, 256). A nyilak a szabad mozgás–dugó átmenet kritikus pontjait jelölik.

Vizsgájuk meg a $\langle \bar{v}(t) \rangle$ átlagsebesség időbeli változását is, mivel így több információt tudhatunk meg a dinamikáról. A $\langle \cdots \rangle$ jel a kezdőfeltételekre való átlagolást, míg a felülvonás továbbra is a konfiguráción belüli átlagot jelenti. Megvizsgálva a 14. ábrán látható eredményeket nyilvánvalóvá vált, hogy τ és a dinamika jellemző relaxációs ideje nem analóg mennyiségek. A rendszer viszonylag hamar eldönti, hogy melyik határciklust választja, de ezután igen sok időt tölt az adott határciklus konkrét geometriai megvalósításával. A tranziens rész 512×512-es rendszer esetén körülbelül egy nagyságrenddel rövidebb mint az, ahol az átlagsebesség már majdnem felvette a határciuklusbeli értékét.

A nagyon hosszú relaxációs idő (τ) oka a determinisztikus dinamika. Néhány elmozduló autó egy majdnem teljesen blokkolt konfigurációban lavinákat indíthat el, ami mindig újabb és újabb konvojok számára teszi szabaddá az utat egészen a teljes blokkolás eléréséig. Hasonlóan ha minden autó mozog, akkor egyetlen autó várakozása miatt egész sor autónak kell átrendezni a helyét, ami újabb akadályoztatásokhoz vezethet. Ezek az egész rendszerre kiterjedő újból és újból megismétlődő átrendeződések nyilván rendszerméret függővé teszik a τ relaxációs időt.



14. ábra: Az átlagsebesség a logaritmus idő függvényében. Látható, hogy legalább egy nagyságrenddel nagyobb az a tartomány, ahol az átlagsebesség már majdnem elérte a határciklusbeli értékét. A nyilak $\tau_{\frac{1}{2}}$ definícióját szemléltetik.

Egy új relaxációs idő definiálunk, amely már csak a dinamikára jellemző. Végtelen rendszerre az első lépésre egzaktul ki lehet számolni az átlagsebességet (lásd B melléklet):

$$\bar{v}(t=1,\varrho) = \frac{1-\varrho}{1-\frac{\varrho}{2}}.$$

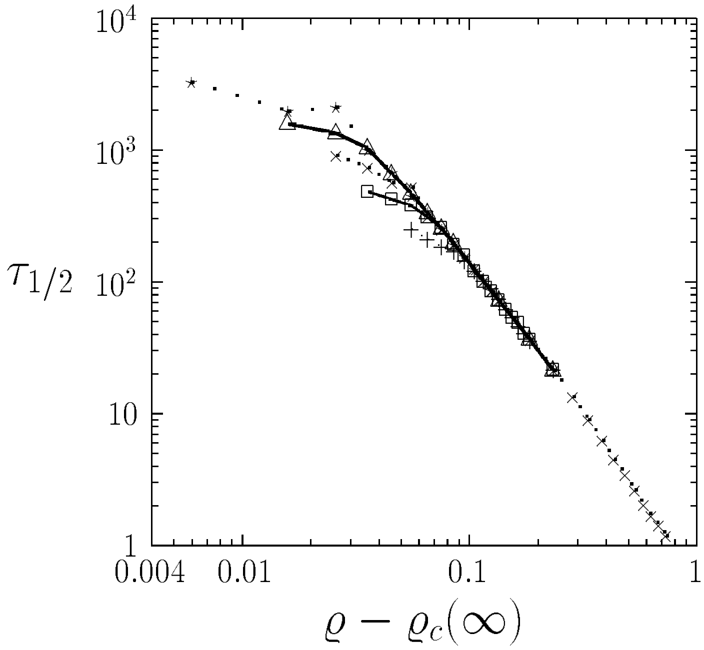
(A hiba a vizsgált véges rendszereknél is elhanyagolható, még 32-es rendszernél is csak $2^{-32} \sim 10^{-10}$ a relatív hiba.) Legyen a $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő az az idő, ami ahhoz szükséges, hogy a rendszer átlagsebessége a kiindulási értéktől fele távolságban megközelítse a határciklusbeli értékét (lásd 14. ábra).

Ez a definíció nagyon jól működik a blokkolt fázisban (15. ábra). Csak az átalakulási pont környékén rendszerméret függő a $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő. Bár a mérés kicsit bizonytalan, de hibán belül kielégíti a következő skálahipotézist:

$$(\varrho_c(L) - \varrho_c(\infty)) \sim L^{-\frac{1}{\nu}}.$$

A kapott exponensek:

$$\varrho_\infty = 0.20 \pm 0.03, \quad \nu = 1.95 \pm 0.2,$$



15. ábra: A $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő a redukált sűrűség függvényében. Látható, hogy a $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő csak a szabad mozgás–dugó átalakulási pont környékén rendszerméretfüggő. A különböző szimbólumok jelentése a 8. ábráéval megegyezik.

amelyek viszonylag jó egyezést mutatnak a határciklusok valószínűségéből számolt exponensekkel. A kritikus pontban a $\tau_{\frac{1}{2}}$ a következőképpen változik:

$$\tau_{\frac{1}{2}} \sim L^z, \text{ ahol } z = 1.0 \pm 0.1.$$

A véges méret skálázás szerint teljesülnie kell a következöknek:

$$\tau(\varrho) \sim \varrho^{-\chi}, \text{ és } \chi = \nu z. \tag{2}$$

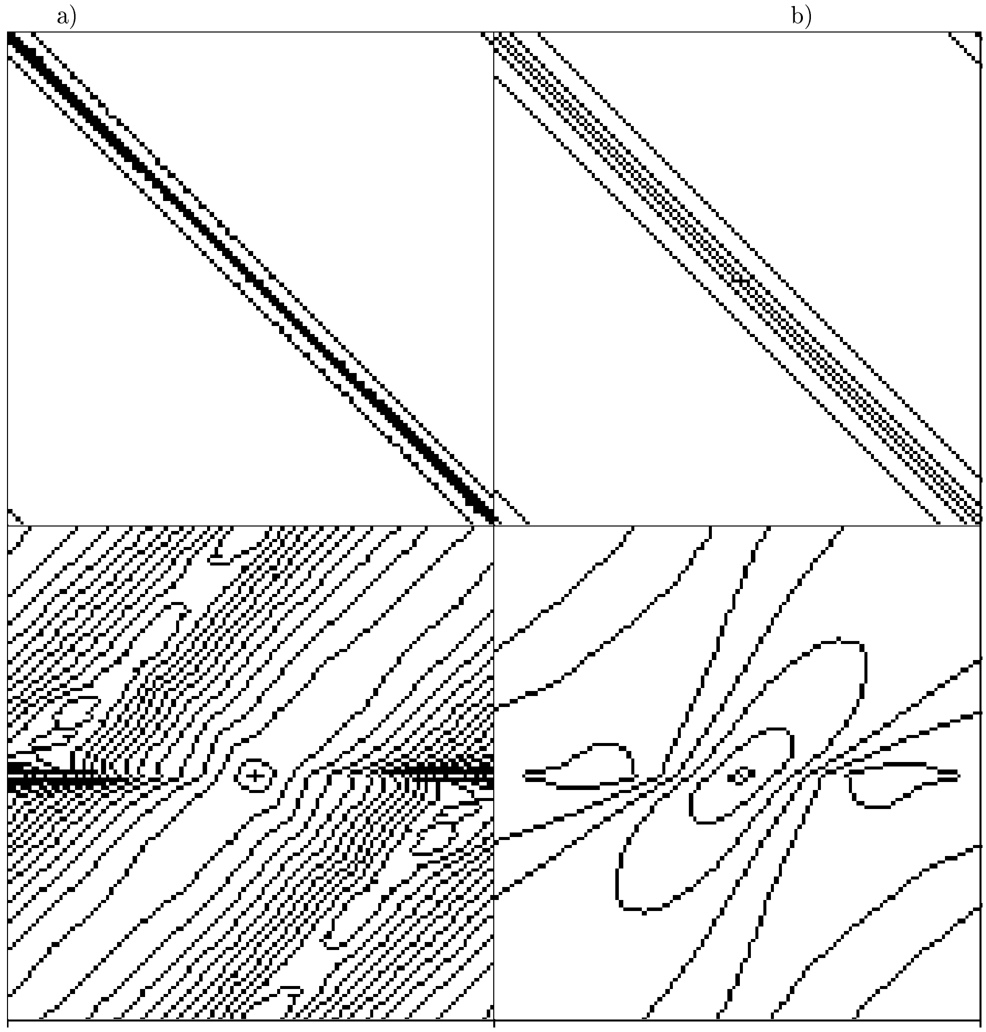
Méréseink szerint $\chi = 2.0 \pm 0.3$ adódott, ami elég jól kielégíti a (2) egyenletet. Tehát azt mondhatjuk, hogy $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő valóban jó paraméter arra, hogy leírjuk a szabad mozgás–dugó átalakulást.

A modell jobb megértése érdekében megvizsgáltuk a határciklusok korrelációs függvényét. A térbeli korrelációs függvényt a következő módon definiáljuk:

$$C(\vec{r}) = \langle m_g(\vec{x}) m_g(\vec{r} + \vec{x}) \rangle_{\vec{x}},$$

ahol g jelzi az autó típusát (jobbra, vagy felfelé haladó) és

A 16.a,b ábrák szabadon mozgó határciklusok korrelációs függvényének átlagát mutatják különböző sűrűségeken, míg a 16.c,d ábrák ugyanezt szemléltetik blokkolt határciklus esetén. Jól látható, hogy a határciklusok szimmetriája hirtelen megváltozik a szabad mozgás–dugó átalakulás során. Ez a jelenség a skálázás ellenére azt sugallja, hogy a szabad mozgás–dugó átalakulás az elsőrendűhöz hasonlít.



16. ábra: Az a), b) ábrák szabadon mozgó, a c), d) ábrák blokkolt határciklus korrelációs függvényei. A sűrűségértékek rendre: $\varrho = 0.10,\ 0.25;\ 0.27,\ 0.35$. A rendszerméret 128. Az ábrák logaritmikusan vannak szintvonalazva ugyanazzal a skálával. A szabadon mozgó határciklus korrelációs függvénye alig változik, míg a blokkolt fázisban nagyon lecsökken a korreláció mértéke, ha eltávolodunk ϱ_c-től.

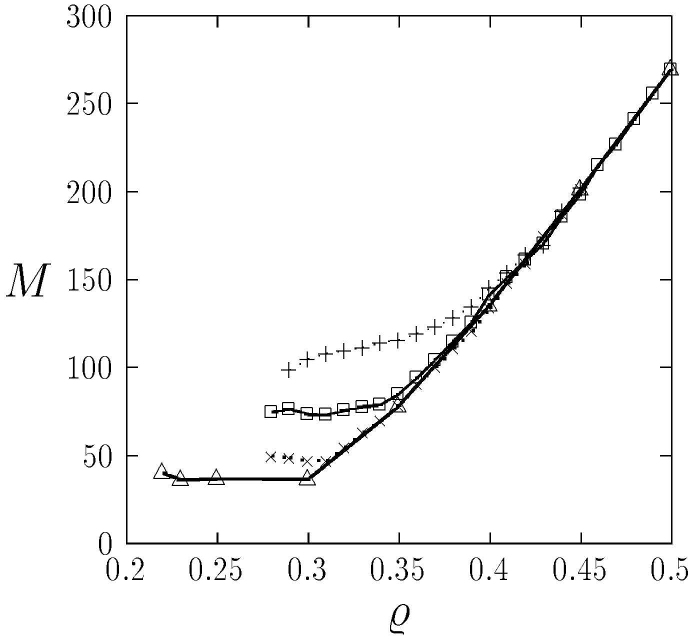
Egy lehetséges interpretációja ennek az eredménynek, ha feltesszük, hogy a szabad mozgás–dugó átalakulás nem szimmetrikus és kisebb sűrűségek felől nézve elsőrendű míg magasabb sűrűségek felől másodrendű. Bár ez a meggondolás vitatható mégis ezt látszik igazolni az a tény is, hogy a korrelációs hossz nem egyformán viselkedik az átalakulás két oldalán.

Definiáljuk a korrelációs hosszat a határciklus szimmetriatengelyének (szabadon mozgó határciklusnál bal felső sarokból jobb alsóba tartó átló (\), míg blokkolt határciklus esetén az erre merőleges átló (/)) irányában az exponenciális illesztés paraméterével. A szabadon mozgó fázisban a korrelációs hossz gyakorlatilag állandó, csak nagyon kis sűrűségeknél cseng le, míg a blokkolt fázisban a korrelációs hossz gyorsan lecsökken. A korrelációs függvény mérése nagyon időigényes feladat, ezért nem tudtunk kellő pontosságot elérni, hogy kvantitatíve is alátámasszuk ezt a feltételezést.

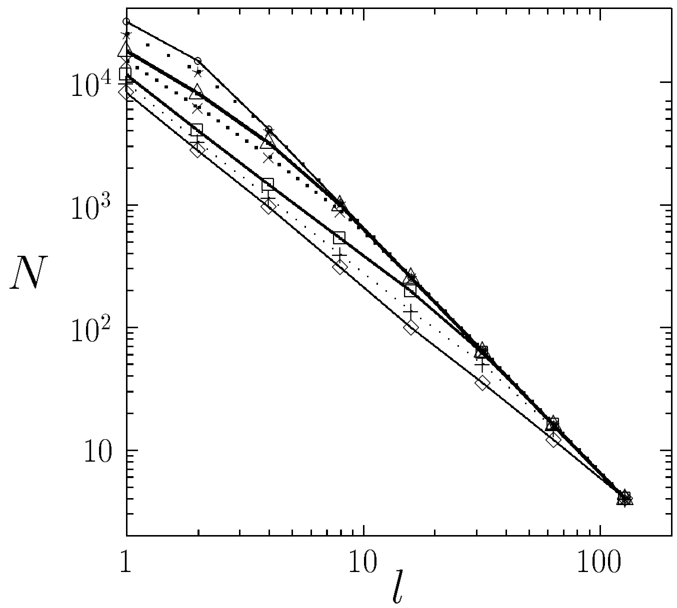
III.5. Fázisátalakulás a dugó geometriájában és hosszútávú viselkedés

A τ relaxációs időnél (13. ábra) látható második csúcs a blokkolt fázisban van, ezért érdemes alaposabban megvizsgálni a dugók szerkezetét. A korrelációs függvények vizsgálata nagyon időigényes és csak kis rendszereknél tudtuk elvégezni, ezért más vizsgálati módszert választottunk. Megnéztük, hogyan változik a konvojok száma (M), ha növeljük a sűrűséget. A gyakorlatban azt vizsgáltuk, hogy mennyi az olyan pontoknak a száma, ahol egy vízszintes autó blokkol egy függőlegeset $\binom{\rightarrow}{\uparrow}$, blokkolt fázisban ez megegyezik a függőleges konvojok számával. Az eredményt a 17. ábra szemlélteti. Különösen nagy rendszereknél szembetűnő az a jelenség, hogy egy bizonyos sűrűség alatt gyakorlatilag konstans a konvojok száma. Az ábrán a görbék a rendszerméret négyzetével (L^2) vannak összeskálázva. A konstans rész befejeztével a görbék teljesen fedik egymást, ami azt jelenti, hogy ott a dugók a teljes teret kitöltik. A konstans részen viszont más exponenssel lehet egymásra skálázni a görbéket.

Alaposabban szemügyre véve a 7.b,c. ábrán látható dugókat meg lehet érteni ennek a furcsa viselkedésnek az okát. Ha a sűrűség kisebb mint ϱ^*, akkor a sűrűség változásával a dugó alakja gyakorlatilag nem változik, csak a benne résztvevő konvojok hossza nő meg. Ekkor a dugó alakja egy sáv és nem tölti ki a teljes négyzetrácsot. Ha a sűrűség nagyobb mint ϱ^*, akkor a dugó szerkezete elágazóvá válik és teljesen betölti a síkot, ezért függ négyzetesen a konvojszám a rendszermérettől.



17. ábra: A függőleges konvojok száma különböző sűrűségek esetén. (Szimbólumok 8. ábra.) A görbék L^2-tel vannak egymásra skálázva. Ha nagy a sűrűség a görbék egybeesnek, ami azt jelenti, hogy a konvojok egyenletesen töltik ki a teret. ϱ_c-hez közeli sűrűségek esetén a görbék szétválnak és gyakorlatilag konstans értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy a dugó szerkezete nem változik, csak a konvojok hossza nő meg.



18. ábra: A Box–counting skálázás a fraktál dimenzió meghatározására. A sűrűség alulról fölfelé sorendben: ϱ =0.25, 0.30, 0.35, 0.45, .055, 0.75, 0.95. Az alsó egyenes meredeksége 1.58, a felsőé 2. A sűrűséget növelve a dugó alakja folyamatosan megy át a teljes síkot kitöltő alakzatba, és még nagyon nagy sűrűségeken (0.95) is van nem triviális skálázás kis skálán.

Méréseink alapján a τ relaxációs idő görbéken látható második maximum helye megegyezik ϱ^*-gal. A maximumot pontosabban meg lehet határozni, mint egy görbe törési pontját, ezért a mérések során ϱ^*-ot a τ relaxációs idő maximumából határozhatjuk meg. Ezt parabolaillesztéssel végeztük el. Véges méret skálázással az (1) egyenlethez hasonló hipotézissel meghatároztuk a végtelen rendszerbeli kritikus pontot, melyre a következő érték adódott:

$$\varrho^* = 0.29 \pm 0.3,$$

$$\nu^* = 0.9 \pm 0.2.$$

A geometria megváltozása nagyon jól nyomon követhető a dugó fraktáldimenzióján is. A ϱ^* pontban a dugó alakját egy nem triviális $D \simeq 1.58$ dimenziójú fraktál jellemzi, míg ϱ^*-nál nagyobb sűrűségek esetén ez átmegy egy $D = 2$ dimenziójú fraktálba (18. ábra). Megfigyelhető azonban, hogy még igen nagy sűrűségek esetén is van skálázás kis méretskálán (7.d ábra). A BML modellben Todaki és Kikutchi [20] is talált egy átalakulást a blokkolt fázisban, amely a korrelációs hossz csökkenésének köszönhető és nagy sűrűségeken teljesen megszűnik a dugókra jellemző szerkezet. Szerintünk [21] a zöld hullám modellben ez a jelenség nem figyelhető meg, hanem épp ellenkezőleg, kis skálán mindig jelen marad a dugó szerkezete. Tehát a két modell viselkedése a blokkolt fázisban jelentősen eltér egymástól.

IV. Átlagtérszerű közelítések a szabad mozgás – dugó átalakulásra

Ebben a fejezetben bemutatunk néhány egyszerű számolást, amelyekkel becslést lehet adni a szabad mozgás–dugó átalakulás kritikus pontjára.

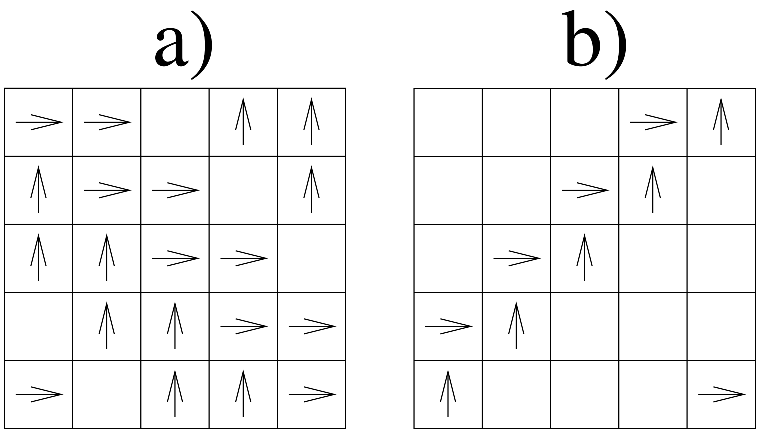
IV.1. Geometriai becslés szélsőséges konfigurációkkal

Véges rendszerek esetén ϱ_c abba a sűrűség-intervallumba esik, ahol mind a blokkolt, mind a szabadon mozó határciklus előfordulhat. Kiszámítjuk a legsűrűbb szabadon mozgó határciklus és a legritkább blokkolt határciklus sűrűségét, ϱ_c biztosan e két sűrűségérték között helyezkedik el. A legsűrűbb szabadon mozgó határciklus létrehozásához elegendő

L szabad rácspont (19.a ábra). Ennél kevesebb szabad rácspont esetén ugyanis lenne olyan sor, amelyben nincs üres mező, ebben a sorban tehát csak felfelé haladó autók lehetnek, de ez egyben azt is jelenti, hogy akkor az egész négyzetrácson nincs jobbra haladó autó csak felfelé haladó, de ezek mozgásához is szükséges legalább L szabad mező. A legritkább dugó előállításához elegendő L jobbra és L felfelé haladó autó (19.b ábra). Tehát a következő feltételeket róhatjuk ki ϱ_c-re:

$$\varrho_{min} = \frac{1}{L} \geq \varrho_c \geq \frac{L-1}{L} = \varrho_{max}.$$

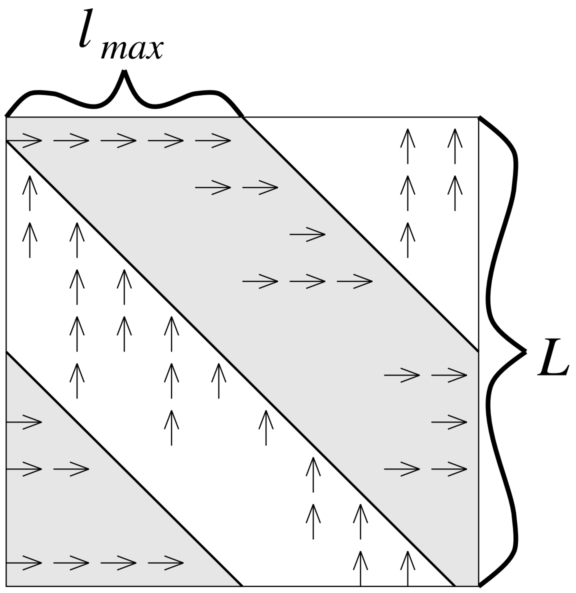
Nagy rendszerekre ezek a határok nem jelentenek semmilyen megkötést, hiszen $\lim\limits_{L\to\infty} \varrho_{min} = 0$ és $\lim\limits_{L\to\infty} \varrho_{max} = 1$. Ezen konfigurációk nagyon speciálisak, ezért kialakulási valószínűségük 0.



19. ábra: Az a) ábra szmlélteti a legsűrűbb szabadon mozgó fázist, a b) ábra a legritkább blokkolt fázist.

IV.2. Becslés a szabadon mozgó határciklus geometriája alapján

Ebben a fejezetben a szabadon mozgó határciklus geometriáját kihasználva adunk egy alsó korlátot ϱ_c-re. Véletlen kezdőállapotból indítva a rendszert a kialakuló szabadon mozgó határciklus nem olyan jól rendezett mint a 19.a ábrán. Látható, hogy az autók sávokba rendeződnek és a vízszintes és függőleges autókat tartalmazó sávok felváltva követik egymást. Egy-egy sávon belül a konvojok hossza jelentősen változik és a sáv szélességét csak a leghosszabb konvoj határozza meg (20. ábra).



20. ábra: Az ábrán egy tipikus szabadon mozgó határciklus látható. A sávok szerkezete olyan, hogy mindegyikben L konvoj van és a szélessége megegyezik a leghosszabb konvojéval.

A sűrűséget meghatározhatjuk, ha kiszámoljuk, hogy egy sávban az autók mennyire töltik ki a rendelkezésre álló helyet. Feltesszük, hogy a konvojok hosszeloszlása minden sávban megegyezik. A sávok vastagságát a sávban lévő leghosszabb konvoj határozza meg, a sávok hossza megegyezik a rács méretével L.

A konvojok hosszeloszlását a kezdeti időpillanatban ki lehet számolni, ekkor ugyanis az autók véletlenszerűen vannak elszórva a rácson. Az eloszlást feltételes valószínűséggel határozzuk meg. A feltétel az, hogy a konvoj egy adott helyen kezdődik, ezután azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen valószínűséggel lesz l hosszú a konvoj. A feltétel ekvivalens megfogalmazása az, hogy egy adott helyen egy megfelelő típusú autó található és az autó mögött lévő mezőben nincs ugyanilyen típusú autó. Ahhoz, hogy a konvoj pontosan l hosszú legyen az szükséges, hogy a kezdő autó előtt még további $l-1$ ugyanilyen autó álljon és az l. mezőben pedig ne álljon ilyen típusú autó.

$$\not\rightarrow \mapsto \underbrace{\rightarrow \cdots \rightarrow}_{l-1} \not\rightarrow$$

Innét megkapható az eloszlás:

$$P(l) = \left(1 - \frac{\varrho}{2}\right) \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{l-1} = \alpha e^{-\alpha l}, \tag{3}$$

tehát kezdetben exponenciális a konvojok hosszeloszlása.

A következőkben meghatározzuk a konvojok hosszeloszlásának időfejlődését. Az III.2. fejezetben megállapítottuk, hogy a dinamika során nincs olyan hatás, amely megszakítana egy konvojt, viszont miután két konvoj találkozik azok együtt maradnak és így mozognak tovább. Tehát a dinamika során az történik, hogy a konvojok időnként találkoznak, összeragadnak, ekkor két konvojból egy új keletkezik, amelynek hossza a kettő hosszának összege.

Tegyük fel, hogy a konvojok találkozásának valószínűsége nem függ a konvojok hosszától. Ekkor a találkozó konvojok hossza csak a megfelelő hossz előfordulási valószínűségétől függ, ami megegyezik a konvojok hosszeloszlás függvényével.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a rendszerméret elég nagy és diszkrét változók helyett folytonosakkal is leírhatjuk a rendszert. Ekkor a következő egyenletet írhatjuk fel a konvojok hosszeloszlásának időbeli változására:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -v(\varrho,t)P(x,t) + \frac{v(\varrho,t)}{2}\int_0^x P(y,t)P(x-y,t)\mathrm{d}y, \tag{4}$$

ahol $P(x,t)$ a folytonos konvoj hosszeloszlásfüggvény, $v(\varrho,t)$ az ütközések gyakorisága. Az egyenlet jobb oldalán az első tag az ütközésből származó konvojszám csökkenést, a második tag a konvojszám növekedést írja le. Azt, hogy egy x hosszúságú konvoj milyen valószínűséggel keletkezik, azt az adja meg, hogy az őt alkotó két részkonvoj milyen valószínűséggel fordul elő.

Sajnos, az (4) egyenletet nem tudjuk egzaktul megoldani. Behelyettesítessel lehet közelíteni kis időtartamra, amikor az idő szerinti derivált konstansnak tekinthető ($\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) \simeq \text{const.}$), illetve ha eltekintünk v sűrűség és időfüggésétől. Felhasználva (3) egyenletet az első néhány rend a következő:

$$P(x,t) = a_1\, e^{-\alpha x} + a_2\, xe^{-\alpha x} + a_3\, x^3 e^{-\alpha x} + \ldots,$$

ahol kis t-re $a_1 \gg a_2 \gg a_3 \gg \cdots$. A mérések alapján a szabadon mozgó határciklusban a konvojok méreteloszlása egeszén jól leírható csak az első taggal is (az illesztési hiba ($\sim 1\%$), ami összemérhető a statisztikus hibával), ha megengedjük, hogy α időben változzon. A második tag hozzávétele mindössze fél százalékkal jobb illeszkedést eredményez. A további számolásokban csak az első tagot használjuk, mivel egyes lépések csak így végezhetők el.

$$P(x,t) = \alpha(t) e^{-\alpha(t)x} \tag{5}$$

Most térjünk vissza az alapproblémára. Egy sávban L konvoj van. A sávban található autók száma (5) alapján:

$$n_s = L\alpha \int_0^\infty x e^{-\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{L}{\alpha}. \tag{6}$$

Most kiszámítjuk a leghosszabb konvoj hosszát. Kérdés, mekkora a leghosszabb konvoj hosszának várható értéke, ha egy sávban L konvoj van. Ennek kiszámításához egy a véletlenszámgenerálásnál szokásos módszert használunk. Egyenletes eloszlásúvá transzformáljuk az exponenciális eloszlást, ott meghatározzuk a leghosszabb konvoj hosszának várható értékét, majd ezt az eredményt visszatranszformáljuk. Legyen tehát z egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású valószínűségi változó, az x α paraméterű exponenciális eloszlású lesz, ha a következő egyenlettel generáljuk:

$$x \equiv \frac{-1}{\alpha} \ln(1-z). \tag{7}$$

Egyenletes eloszlás esetén L esemény után a legnagyobb szám várható értéke:

$$\overline{z_{max}} = L/(L+1). \tag{8}$$

Exponenciális eloszlás esetén a (7) és (8) egyenleteket használva meg tudjuk határozni L esemény után a leghosszabb konvoj hosszának várható értéke:

$$\overline{x_{max}} = \frac{1}{\alpha} \ln(L+1). \tag{9}$$

Visszatérve a közlekedési problémára, megkaptuk, hogy átlagosan milyen széles egy sáv. Felhasználva (6) és (9) egyenletet és azt a tényt, hogy egy sávban L konvoj van megkaphatjuk az autók sűrűségét egy sávon belül. Mivel a határciklusban a sávokra ugyanazok a feltételek igazak és az egész mező sávokból áll, ezért ezzel megbecsülhetjük a szabad mozgás–dugó átalakulás kritikus pontját:

$$\hat{\varrho}_c = \frac{L/\alpha}{L/\alpha \ln(L+1)} = \frac{1}{\ln(L+1)} \simeq \frac{1}{\ln L}.$$

Ez arra az esetre vonatkozik, amikor nincs semmilyen korreláció az egy sávban található konvojok hossza között. A végeredmény érdekessége, hogy független α-tól, az exponenciális eloszlás paraméterétől, ami azt jelenti, hogy ha $\varrho < \hat{\varrho}_c$, akkor a sávszerkezet ritkább, ha pedig $\varrho > \hat{\varrho}_c$, akkor pozitív korreláció van az egy sávban található konvojok hossza között. Ezt a jelenséget megfigyelhetjük a 7.a ábrán is. Ezen korrelációk miatt az igazi szabad mozgás – dugó kritikus pont nagyobb sűrűségeknél lesz, azaz

$$\varrho_c > \hat{\varrho}_c.$$

Az 1. táblázatban összehasonlítjuk ezt az eredményt a mért adatokkal és a IV.3 fejezet becslésével. Jól látható, hogy ez a közelítés nagyobb rendszereknél pontosabb mint a másik. Ennél azonban van egy lényegesebb előnye is ennek a becslésnek. Azt kaptuk ugyanis, hogy ha végtelen rendszerben 0 a kritikus pont, akkor a méret függvényében logaritmikusan, vagy még lassabban kell zérushoz tartania a kritikus pontoknak. Ha tehát azt találjuk, hogy a méret függvényében a kritikus pontok ennél gyorsabban (pl. hatványfüggvény szerint) tartanak egy végtelen rendszerbeli határértékhez, akkor az valószínűsíti, hogy a határérték csak egy pozitív szám lehet.

IV.3. Dinamikai becslés

Vizsgáljuk egy dugó létrejöttét. Az alapötlet a következő: Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}$ konvoj megállásra kényszerül, az $\mathcal{A}$ konvoj miatt. Ha egy $\mathcal{C}$ konvoj általában előbb érkezik, mint ahogy az $\mathcal{A}$ konvoj elhalad $\mathcal{B}$ elől, akkor a dugó növekszik.

Teszünk néhány feltételezést, hogy egyszerűbbé és végigvihetővé váljon a számolás. A négyzetrács véges méretű, oldalhossza L. Minden konvoj l hosszú és minden sorban és oszlopban azonos számú (n) konvoj található. Csak átlagértékekkel fogunk számolni. Ez nem jelent nagyobb hibát, mint amit az előző egyszerűsítések okoznak.

Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ konvojok találkozása után az $\mathcal{A}$ konvojnak átlagosan $l/2$ mezőt kell haladnia, hogy elhaladjon a $\mathcal{B}$ konvoj elől. Ez alatt kell a $\mathcal{C}$ konvojnak a $\mathcal{B}$-hez érnie, hogy növekedjen a dugó. Minden sorban és oszlopban $L - nl$ szabad mező van, tehát két konvoj között átlagosan $(L-nl)/n$ szabad hely van. A $\mathcal{B}$ konvoj l hosszú így a $\mathcal{C}$ konvoj lehet az l sor (ill. oszlop) bármelyikében, tehát a $\mathcal{B}$ konvojhoz legközelebb eső $\mathcal{C}$

konvoj $(L-nl)/nl$ távolságra van. A dugó növekedéséhez az szükséges, hogy ez a távolság kisebb legyen, mint amit az $\mathcal{A}$ konvoj tesz meg.

$$\frac{L-nl}{nl} \leq \frac{1}{2}$$

A sűrűség $\varrho = nl/L$. Tehát

$$\varrho_c = \frac{nl}{L} \geq \frac{1}{1+l/2}. \tag{10}$$

Az előző fejezetben kiszámoltuk, hogyan változik a konvoj hosszeloszlása a rendszer fejlődése során. Azonban az időskála egyeztetését a valósággal nem sikerült megoldanunk, ezért nem tudjuk megmondani, hogy melyik időpillanatban kell vizsgálni az eloszlást. Az (10) egyenlet ellenőrzését csak úgy tudtuk megoldani, hogy az átlagos konvojhosszat a szimulációk eredményéből vesszük és azt helyettesítjük be l helyébe.

Megmértük tehát a konvojhosszeloszlást a szabadon mozgó és a blokkolt határciklusokban. Azt feltételeztük, hogy az így kapott sűrűségértékek szabadon mozgó határciklus esetén ϱ_c fölött, míg blokkolt határciklus esetén ϱ_c alatt helyezkednek el. Az 1. táblázat foglalja össze a kapott eredményeket. Látható, hogy kis rendszereknél ez a közelítés jobb a IV.2. fejezetben leírtnál.

	1.módszer		2. módsz.	
Rendszer méret	Számított alsókorlát	Számított alsókorlát	Számított alsókorlát	Mért érték
32	0.31	0.42	0.29	0.35
64	0.25	0.44	0.24	0.30
128	0.20	0.43	0.21	0.27
256	0.16	0.42	0.18	0.26
512	0.13	0.42	0.16	0.24
1024	—	—	0.14	0.23

1. Tálázat: A IV.2. és IV.3. fejezet becsléseinek összehasonlítása a mért eredményekkel.

Összefoglalva a közelítések eredményét megállapíthatjuk, hogy a végtelen rendszer kritikus pontjára nem tudtunk különösebb megszorítást tenni, eltekintve a fenti megjegyzéstől. Véges, nem túl nagy rendszerekre $L < 1024$ elfogadható korlátokat sikerült adni a szabad mozgás–dugó átalakulás kritikus pontjára.

V. Összefoglalás

A dolgozatban megvizsgáltunk néhány közlekedési modellt. Egydimenziós esetben autópályák, illetve egyszerűbb hálózatok leírásával foglalkoztunk. Rövid áttekintést adtunk a mikroszkopikus és a makroszkopikus megközelítések néhány egyszerűbb modelljéről.

A diplomamunkában központi helyet kaptak a sejtautomata modellek, ezeket részletesebben bemutattuk az egydimenziós esetben is. Megmutattuk, hogy egy nagyon egyszerű modell [10] is a valósággal igen jó egyezést mutató eredményeket mutat. Általános esetben a fundamentális diagram (az autóáram függése az autók sűrűségétől) nemlineáris és nem szimmetrikus és emiatt sűrűséghullámok jelenhetnek meg a rendszerben. A sűrűséghullámok, ill. dugók a fundamentális diagram maximuma környékén kezdenek jelentőssé válni, megnövelve ezzel a sebesség fluktuációját. Emiatt nehéz az utakat jól kihasználni, hiszen a maximális kihasználtság környékén a rendszer nagyon érzékeny kis perturbációkra is.

Ugyanezekkel az egyszerű modellekkel lehet vizsgálni a vezetési stratégiák hatékonyságát különböző közlekedési helyzetekben. Kis változtatásokkal a gyalogos közlekedésre is alkalmazhatók a már ismert eszközök. Információt kaphatunk arról is, hogy milyen forgalomirányítás a leghatékonyabb.

A kétdimenziós modellek témakörében eddig sokkal kevesebb eredmény született. Ezek nagy része egyszerű sejtautomata modell vizsgálata. Ezek a modellek nagyon egyszerűek, és talán a valóságtól távolinak tűnhetnek. A nagyfokú egyszerűsítésre azért van szükség, mivel még ezeknek a rendszereknek is nagyon összetett a viselkedése, és sok érdekes tulajdonságuk van, amely a városi közlekedés jelenségeivel kapcsolatba hozható.

A dolgozatban a BML modell zöld hullám változatát vizsgáltuk számítógépes szimulációval. A modósításnak az volt az oka, hogy a zöld hullám modell tartalmaz néhány realisztikusabb elemet (zöld hullám, az autók szeretnek konvojban közlekedni), és emellett sokkal jobbak a szimulációs lehetőségek, körülbelül 10^3-szor kevesebb léptetés kell a határciklus eléréséhez mint a BML modellben. Mindemellett még így is nagyon hosszú a relaxációs idő a determinisztikus dinamika miatt.

A részletes vizsgálat során két fázisátalakulást találtunk a rendszerben a sűrűség függvényében. Az egyik a szabad mozgás–dugó fázisátalakulás, amely szinte mindegyik közlekedési modellben megfigyelhető. Jelen esetben ez az átalakulás nagyon drasztikus, mivel az átalakulási pont alatt a tranziens szakasz után szabadon mozoghatnak az autók, míg az átalakulásnál nagyobb sűrűségeknél teljesen blokkolódik az összes autó mint a BML modellben. A korrelációs függvény hirtelen megváltozása is elsőrendű átalakulásra utalna, de a rendszer különböző paraméterei, a $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő, az átalakulási pontok helyei, az átalakulás szélessége skálázik a rendszerméret függvényében, ami viszont a másodrendű átalakulások jellemzője. Ezt az ellentmondást nem sikerült egyértelműen feloldanunk. Egyik lehetséges megoldás az lenne, ha feltesszük, hogy az átalakulás nem szimmetrikus, hanem kisebb sűrűségektől nézve elsőrendű, míg magasabb sűrűségektől nézve másodrendű lenne. Ezt a szokatlan elképzelést látszik alátámasztani a korrelációs függvény és a $\tau_{\frac{1}{2}}$ relaxációs idő különböző viselkedése a két fázisban.

A másik átalakulás egy geometriai átalakulás a blokkolt fázisban, amikor a dugó geometriája egyenesből elágazóvá válik. Az átalakulás jellemzője, hogy a dugó geometriája nem triviális fraktál a ϱ^* átalakulási pontban, amely magasabb sűrűségek felé átmegy a teljes teret kitöltő kétdimenziós alakzatba. Todaki és Kikutchi [20] szintén talált egy átalakulást a blokkolt fázisban, de az ő interpretációjuk szerint az a korrelációs hossz csökkenésének a következménye. A zöld hullám modellben ez utóbbi átalakulás nem lépett fel.

Természetesen sem a BML, sem a zöld hullám modellt nem lehet közvetlenül valós közlekedési helyzetekre alkalmazni, de ezek a modellek képesek a városi közlekedés néhány érdekes jelenségét megragadni. Gyakorlati jelentősége lehet azoknak a kérdéseknek, hogy a szabad mozgás–dugó átalakulást le lehet-e írni mint egy fázisátalakulás, vannak-e változások a valós dugók geometriájában.

További lépésként szeretnénk megvizsgálni a zöld hullám modell sztochasztikus változatát, ebben ugyanis nem jelenik meg a determinisztikus dinamika miatti igen hosszú relaxációs idő. Jelenleg azt vizsgáljuk, hogy milyen hatással van a rendszerre, ha az autók bizonyos feltételek mellett képesek sávot váltani.

Megjegyezzük, hogy a modellben viszonylag egyszerűen be lehet vezetni a négy irányba mozgó autókat kanyarodási lehetőséggel. Ezek a modellek nyilván egyre inkább olyan eredményeket fognak adni, amelyek mind konkrétabban alkalmazhatók valós közlekedési problémákra.

A Melléklet

Multi spin kódoló algoritmus a zöld hullám modellre

Számítógépes szimulációkban nagyon fontos a számolás sebessége, mivel döntően ez határozza meg a mérési lehetőségeket. A szimulációk során általában átlagokat vizsgálunk, aminek pontos meghatározásához vagy nagy rendszert, és/vagy sok eseményt kell megmérni. Ezért a számítógépes szimulációk során a mérések megkezdése előtt érdemes optimalizálni az algoritmust.

Az algoritmus optimalizálásán túl van egy másik módszer is, amelylyel sokkal nagyobb sebességnövekedést lehet elérni. Ez a számítógépekben rejlő lehetőség, hogy egy művelettel több mezőn is elvégezzük a szükséges transzformációt. Ezt azért lehet megtenni, mivel egy cellának mindössze három állapota lehet (üres, vagy jobbra, ill. felfelé haladó autót tartalmaz) és ennek tárolásához két bit is elegendő.

Vegyünk tehát két tömböt, amelyek mindegyikének egy bitje egy cellát jellemez. Az egyik tömbben tároljuk a jobbra haladó autók pozícióját, a másikban a felfelé haladókét, mégpedig úgy, hogy ha az adott mezőn megfelelő típusú autó van, akkor a bit 1, egyébként pedig a bit értéke 0. Nyilván nem lehet egyszerre mindkét tömbben ugyanazon a helyen 1-es bit. A tömbök elemeit úgy helyeztük el, hogy azokban az egymás melletti bitek vízszintesen egymás mellett lévő cellákat jelentsenek.

A függőleges irányú léptetés algoritmusa megegyezik azzal az algoritmussal, amit akkor használnánk ha egy mezőt egy tömbelemmel jelölnénk: Menetiránnyal szemben haladunk végig a mezőn és ha egy függőleges autó előtt üres mező található, akkor azt egyet előreléptetjük. A menetiránnyal szemben való haladási irány biztosítja, hogy a konvojok együtt maradjanak, hiszen így először a legelsőt mozdítjuk el és csak azután a következőt, ami követni fogja az elsőt. Probléma csak a kezdeti pontnál lehet, ha éppen egy konvoj közepénél kezdjük el az algoritmust. Ezt meg lehet oldani, ha kétszer megyünk körbe a mezőn, másodszor már csak azokat az autókat engedve haladni, amelyek az elsőben nem mozogtak és egy olyan konvoj részei, amelynek a közepén kezdtük az algoritmust. Mivel a konvojok sokkal rövidebbek mint a rendszerméret, ezért a második körben a mezőnek csak egy kis részét kell újra megvizsgálnunk.

A vízszintes algoritmus bonyolultabb, mivel ott egy változón belül kell a biteket mozgatni a szerint, hogy az autó mozoghat-e, vagy sem. Először is rögzítjük, hogy az autók a nagyobb helyiértékű bitek felől haladnak az alacsonyabb helyiértékűek felé. Ez a választás nagyon fontos az algoritmus során. A következő műveleteket használjuk az algoritmus során:

- ciklikus bitmozgatás a magasabb helyiértékű bitektől az alacsonyabb helyiértékűek felé (`SHIFT`). A ciklikusság azt jelenti, hogy a jobb szélen álló bit a művelet elvégzése után a bal szélső pozícióba kerül.
- ciklikus összeadás (`ADC`). A ciklikusság azt jelenti, hogy a bal szélén kifutott maradékbitet hozzá kell adni a jobb szélső bithez.
- Az és (`AND`), a vagy (`OR`) és a tagadás (`NOT`) műveleteket a megszokott módon használjuk.

1)	Jobbra haladó	:	01101100	↑ → → ␣ → → ↑ ␣
2)	Felfelé haladó	:	10000010	
3)	`Shift 1)`	:	00110110	␣ ␣ → → ␣ → → ␣
4)	`2) AND 3)`	:	00000010	×
5)	`3) ADC 4)`	:	00111000	× × ×
6)	`5) AND NOT 3)`	:	00001000	×
7)	`3) - 4) + 6)`	:	00111100	↑ ␣ → → → → ↑ ␣

21. ábra: A multi spin algoritmus szeléltetése egy példán keresztül. A ␣ szimbólum üres cellát jelent, az x-ek szerepe mindössze a szem vezetése.

Az algoritmus (szemléltetés: 21. ábra) első lépéseként a jobbra haladó autókat tartalmazó tömbön elvégezzük a `SHIFT` műveletet. Ha minden konvoj szabadon mozoghat, akkor ezzel a művelettel már megkaptuk a végeredményt. És (`AND`) műveletet végezve ezzel és a felfelé haladó autókat tartalmazó tömbbel, az eredményben csak a blokkolt konvojok előtt kapunk aktív biteket. Ezt ciklikusan hozzáadva (`ADC`) a `SHIFT` művelettel elcsúsztatotthoz a blokkoltaknál megjelenik egy aktív bit a konvoj eredeti helyének utolsó pozícióján, míg a szabad konvojoknál ez a pozíció üresen marad. Ezt a különbséget kihasználva egyszerű maszkolással el lehet érni, hogy a nem blokkolt konvojok bitjeit eltüntessük. Ezután nincs más dolgunk, mint a `SHIFT` művelettel elmozgatott tömbből visszamozgatni a blokkolt konvojokat.

B Melléklet

Az autók átlagsebességének kiszámítása a kezdeti időpillanatban

A szimulációt kezdhetjük vízszintes, vagy függőleges lépéssel is. Mi a vízszinteset választottuk. Mivel a mozgó autók sebessége 1, ezért annak valószínűsége, hogy egy jobbra haladó autó mozog, megegyezik az átlagsebességgel:

$$\bar{v}(t=1) = n_{\rightarrow}(\text{mozgó}) v \frac{1}{N_{\rightarrow}} = \frac{n_{\rightarrow}(\text{mozgó})}{N_{\rightarrow}} = P_{m,\rightarrow}(1),$$

ahol $n_{\rightarrow}(\text{mozgó})$ a mozgó, $N_{\rightarrow}$ az összes jobbra haladó autó száma, $P_{m,\rightarrow}(1)$ annak valószínűsége, hogy egy jobbra haladó autó mozog az első lépés során.

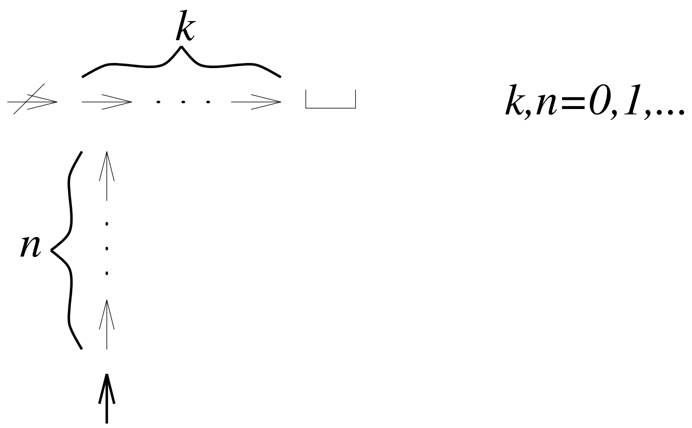
Most számoljuk ki $P_{m,\rightarrow}(1)$ valószínűséget. Kihasználjuk, hogy kezdetben az autók véletlenszerűen vannak elszórva és nincs közöttük semmilyen korreláció. Egy autó akkor mozog, ha az előtte lévő mező üres ($p_1 = 1 - \varrho$), vagy pedig az adott lépésben válik szabaddá ($p_2 = (1 - \varrho/2) P_{m,\rightarrow}(1)$). Csak ebben a két esetben mozoghat egy autó. Mivel a két esemény független egymástól, ezért a valószínűségek összeadódnak:

$$P_{m,\rightarrow}(1) = p_1 + p_2 = 1 - \varrho + \left(1 - \frac{\varrho}{2}\right) P_{m,\rightarrow}(1).$$

Innét $P_{m,\rightarrow}(1)$ kifejezhető:

$$\bar{v}_{\rightarrow}(t=1) = P_{m,\rightarrow}(1) = \frac{1-\varrho}{1-\frac{\varrho}{2}}.$$

Számoljuk ki a függőlegesen mozgó autók átlagsebességét a következő lépésben ($t = 2$). Nem használhatjuk automatikusan az előző gondolatmenetet, mivel ott kihasználtuk, hogy nincsenek korrelációk az autók között. Az első lépés után ez már nem igaz. A különböző korrelációk nyomonkövetése helyett inkább azt az utat választjuk, hogy a kezdeti korrelálatlan konfigurációból indulunk ki és két lépésen át nyomonkövetjük a rendszert.



22. ábra: Azon esetek szemléltetése, amelyekben egy felfelé haladó konvoj lépni tud a második lépésben. Az első lépés során a jobbra haladó konvojok mozoghatnak. A ␣ szimbólum üres cellát jelent, az áthuzott jobbranyil pedig azt, hogy ott nem lehet jobbra haladó autó.

A 22. ábra összefoglalja a lehetséges eseteket: Ha az autó előtti mező eredetileg üres volt, akkor annak az első lépés során nem szabad betöltődnie, tehát tőle balra nem állhat jobbra haladó autó. A felfelé haladó autó előtti mezőnek kezdetben nem feltétlen kell üresnek lennie, hiszen ha kezdetben ott egy jobbra haladó autó volt, akkor az az első lépés során elmozdulhat. Ehhez szükséges, hogy a jobbra haladó autó mozogni tudjon, illetve, hogy a helyét ne töltse be egy másik autó. Ehhez szinten az szükséges, hogy a balra lévő mezőben ne legyen jobbra haladó autó. Természetesen a felfelé haladó autó és az esetlegesen előtte álló jobbra haladó autó is lehet konvoj része. Ezekre ugyanazok a szabályok vonatkoznak mint az egyedülálló autókra. Összefoglalva a második lépés során a függőleges autók átlagsebessége a következő:

$$P_{m.\uparrow}(2) = (1-\varrho)\left(1-\frac{\varrho}{2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^k\right),$$

ahol az első tag az elmozduláshoz szükséges üres hely valószínűsége, a második tag ahhoz szükséges, hogy az első lépés során egy jobbra haladó autó ne töltse be az üres helyet, a harmadik tag azt fejezi ki, hogy a függőleges autó lehet konvoj része, a negyedik tag azt veszi figyelembe, hogy a jobbra haladó autó lehet egy konvoj utolsó autója is. Elvégezve az összegzést megkapjuk az átlagsebességet a második lépésben:

$$\bar{v}(t=2) = P_{m,\uparrow}(2) = \frac{1-\varrho}{1-\frac{\varrho}{2}},$$

ami éppen megegyezik az első lépésbeli átlagsebességgel.

A módszer folytatása elég nehézkes, a következő lépésben még meghatároztuk az átlagsebességet, de utána nagyon elbonyolódik a számolás, ezért ezzel a módszerrel nem érdemes az átlagsebesség időfüggését vizsgálni.

Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnék köszönetet mondani tanáromnak, Dr. Kertész Jánosnak, akivel együtt vittük véghez ezt a munkát. Rengeteg segítséget kaptam tőle szakmai téren, lehetőséget, hogy megismerkedjem más rokon témákkal is. Köszönettel tartozom türelméért, és nekem nyújtott megkülönböztetett figyelméért.

Szeretném megköszönni Czirók Andrásnak a sok hasznos beszélgetést, a jó tanácsokat.

Köszönettel tartozom még Boncz Andrásnak, akivel szintén sok hasznos beszélgetést folytattam.

Irodalomjegyzék

—

[1] Treiterer J. and Myers J. A., The hysteresis phenomenon in traffic flow, Proc. 6th Int. Symp. *Transportation and traffic theory*, D. Buckley, Sydney, 1974

[2] Prigogine I. and Andrews F. C., A Boltzmann-like approch for traffic flow, *Oper res.*, **8** 789 (1960)

[3] Lighthill M. J. and Whitham G. B., *On kinematic waves* - II. a theory of traffic flow on long crowded roads, *Proc. Roy. Soc.*, London Ser. A **229** 317 (1955)

[4] Prigogine I. and Herman R. *Kinematic Theory of Vehicular Trafic*, Elsevier, New York 1971

[5] Hilliges M., *Ein phänomenologisches Modell des dynamischen Verkehrsflusses in Schnellstraßennetzen,*Verlag Shaker, Aachen 1995

[6] Helbing D., Improved fluid–dynamic model for vehicular traffic, *Phys. Rev.* E, **51** 3164 (1995)

[7] Helbing D., A Fluid–Dynamic Model for the Movement of Pedestrians, *Complex Systems,* **6** 391 (1992)

[8] Kometani E. and Sasaki T., On the stability of traffic flow, *J. Opns. Res.,* **2** 11 (1958)

[9] Edie L. C., Car–flowing and steady–state theory for noncongested traffic, *Oper. Res.,* **9** 66 (1961)

[10] Nagel K. and Schreckenberg M., A cellular automaton model for freeway traffic, *J. Phys* I, **2** 2221 (1992)

[11] Nagel K., Life Times of Simulated Traffic Jams, *Int. J. Mod. Phys.* C, **5** 567 (1994)

[12] Nagel K. and Rasmussen S., Traffic at the edge of chaos, *Proceedings of the Alife 4*, MIT press, Cambridge, MA 1994

[13] Csányi G. and Kertész J., Scaling behaviour in discrete traffic modells, *J. Phys.* A, **28** 427 (1995)

[14] Nagel K. and Paczuski M., Emergent traffic jams, *Phys. rev.* E, **51** 2909 (1995)

[15] Migowsky S., Wanschura T., Ruján P., Competition and cooperation on a toy Autobahn model, *Z. Phys.* B, **95** 407 (1994)

[16] Biham O., Middleton A. A. and Levine D., Self–organization and a dynamical transition in traffic–flow models, *Phys. Rev.* A, **46** 6124 (1992)

[17] Molera J. M., Martínez F. C., Cuesta J. A. and Brito R., Theoretical approach to two–dimensional traffic flow models, *Phys. Rev.* E, **51** 175 (1995)

[18] Török J., Kertész J. and Manna S. S., Phase Transition in a Two-Dimensional Green Wave Traffic model, *Traffic and Granular Flow* Proceedings of a Conference, Jülich, 1995, World Scientific 1996

[19] Nagatani T., Jamming transition in the traffic-flow model with two-level crossing, it Phys. Rev. E, **48** 3290 (1993)

[20] Tadaki S., Kikutchi M., Jam phases in a two-dimensional celluar automaton model of traffic flow, *Phys. Rev.* E, **50** 4564 (1994)

[21] Török J. and Kertész J., The Green Wave Model of Two Dimensional Traffic: Transitions in the Flow Properties and in the Geometry of the Traffic Jam, *Physica* A, **231** 515 (1996)